وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة سنة ٢٠٠٦ العادية

عدد المسائل: اربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I– (**4 points**)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $x + y + z - 4 = 0$ et les points A (3 ;1 ; 0) , B(1; 2 ;1) , C(1; 1;2) et E(2 ; 0 ;–1).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2) a- Vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan (P).

b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (d) perpendiculaire en A au plan (P) et vérifier que E est un point de (d).

3) On désigne par (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (BE).
Ecrire une équation de (Q).

4) Les plans (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

a- Démontrer que les droites (D) et (BC) sont parallèles.

b- M est un point variable de (BC), démontrer que la distance de M au plan (Q) reste constante.

II– (**4,5 points**)

Un sac **S** contient **huit** billets: **quatre** billets de 10 000LL, **trois** de 20 000LL et **un** de 50 000LL.
Un autre sac **T** contient aussi **huit** billets : **trois** billets de 10 000LL et **cinq** de 20 000LL.

1) **On tire simultanément et au hasard deux billets du sac S**.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « les deux billets tirés sont de la même catégorie »
B : « la somme des valeurs des deux billets tirés est 30 000LL »

2) **On choisit au hasard l'un des deux sacs T et S puis on tire simultanément et au hasard deux billets de ce sac** .
On considère les événements suivants :
E: « Le sac choisi est **S** »
F: « La somme des valeurs des deux billets tirés est 30 000LL »
Calculer les probabilités $P(F \cap E)$ et $P(F \cap \overline{E})$. En déduire $P(F)$.

3) **On tire au hasard un billet du sac S et un billet du sac T**.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des deux billets tirés.

a- Vérifier que $P(X = 60\,000) = \dfrac{3}{64}$.

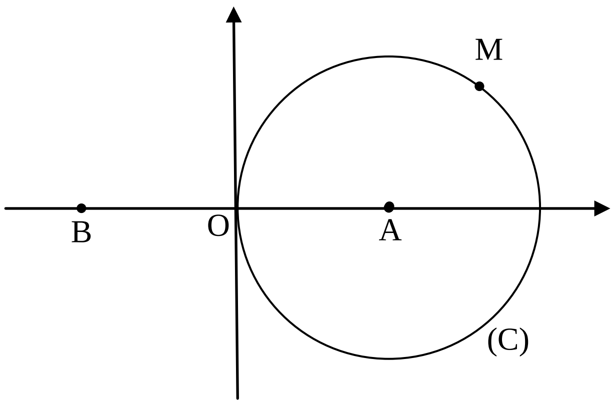
b- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

III– **(3,5 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – 1.Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

La forme exponentielle de l'affixe z d'un point M de (C), distinct de O, est donnée par $z = re^{i\theta}$.

Soit M' le point d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{r}e^{i(\pi+\theta)}$.



1) Montrer que $z' \times \overline{z} = -1$.

2) Montrer que les points O, M et M´ sont alignés.

3) a- Justifier l'égalité $|z - 1| = 1$.

b- Démontrer que $|z' + 1| = |z'|$ et en déduire que M' décrit une droite (d) que l'on déterminera.

4) Déterminer les points M de (C) pour lesquels $z' = -z$.

IV– (**8 points**)

A- Soit l'équation différentielle (E): $y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 16x + 10$.

On pose $z = y - x^2 + 2x$.

1) Ecrire une équation différentielle (E') satisfaite par z.
2) Résoudre (E') et déduire la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet au point A(0 ;1) une tangente parallèle à l'axe des abscisses .

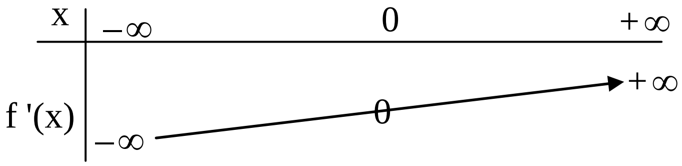
B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{2x} + x^2 - 2x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b- Donner sous forme décimale f(1) et f(–1,5).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.



a- Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de f '(x) .

b- Dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer la courbe (C).

4) Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a- Déterminer le sens de variations de F.

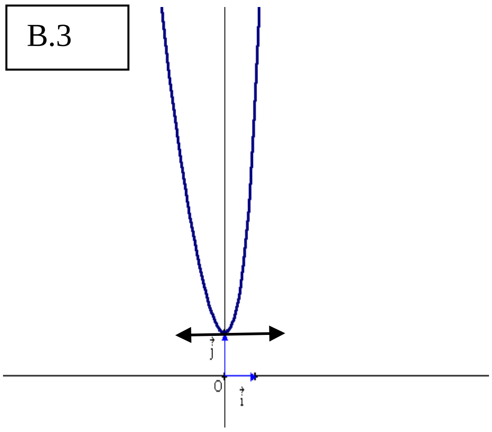
b- Quel est le signe de F(x) ? justifier la réponse.

MATHEMATIQUES SV PREMIERE SESSION 2006

I	Eléments des réponses	Notes
1	$\overrightarrow{BA}(2\,;-1\,;-1)$, $\overrightarrow{BC}(0\,;-1\,;1)$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est rectangle en B	½
2.a	$x_A+y_A+z_A-4=3+1+0-4=0$; $A\in(P)$. $x_B+y_B+z_B-4=1+2+1-4=0$; $B\in(P)$. $x_C+y_C+z_C-4=1+1+2-4=0$; $C\in(P)$.	½
2.b	$\overrightarrow{N}_P(1;1;1)$ est un vecteur directeur de (d) donc (d) : $x=\lambda+3$; $y=\lambda+1$; $z=\lambda$. Pour y = 0 on a λ = –1, donc x = 2 et z = – 1 d'où $E\in(P)$.	1
3	$\overrightarrow{BE}(1\,;-2\,;-2)$ est normal à (Q) donc (Q) : x – 2y – 2z + r = 0 . $A\in(Q)$ donc r = – 1 ; (Q) : x – 2y – 2z – 1 = 0.	½
4.a	$(D)\begin{cases}x+y+z-4=0\\x-2y-2z-1=0\end{cases}$; $(D)\begin{cases}x=3\\y=-t+1\\z=t\end{cases}$ donc $\overrightarrow{V}_D(0\,;-1\,;1)=\overrightarrow{BC}$; (BC) // (D). ▶**OU :**(BC) est perpendiculaire à (AB) et orthogonale à (EA) donc la droite (BC) est perpendiculaire au plan (EAB) et en particulier à (EB) , or (EB) est perpendiculaire à (Q) donc (BC) est parallèle à (Q) , le plan (P) contenant (BC) coupe (Q) suivant (D) parallèle à (BC).	1
4.b	$(BC):\begin{cases}x=1\\y=-m+2\\z=m+1\end{cases}$; M(1 ; – m + 2 ; m +1) ; $d(M;(Q))=\dfrac{\lvert 1+2m-4-2m-2-1\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=2$. ▶**OU :** (BC) // (D) et $(D)\subset(Q)$ alors (BC) // (Q) et $M\in(BC)$ donc $d(M;(Q))=\text{cte}$.	½

<table>
<tr><th>II</th><th>Eléments des réponses</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>P(A) = P[(10 000 , 10 000) ou (20 000 , 20 000)] $=\dfrac{C_4^2+C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{9}{28}$.
P(B) = P(10 000 , 20 000) = $\dfrac{C_4^1\times C_3^1}{C_8^2}=\dfrac{3}{7}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P(F\cap E)=P(E)\times P(F/E)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{14}$.
$P(F\cap\overline{E})=P(E)\times P(F/\overline{E})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_3^1\times C_5^1}{C_8^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{28}=\dfrac{15}{56}$.
P(F) = $P(F\cap E)+P(F\cap\overline{E})=\dfrac{3}{14}+\dfrac{15}{56}=\dfrac{27}{56}$.</td><td>1½</td></tr>
<tr><td>3.a</td><td>P(X = 60 000) = P(50 000 , 10 000) = 1/8 × 3/8 = 3/64.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>3.b</td><td>
<table>
<tr><td>$X=x_i$</td><td>20 000</td><td>30 000</td><td>40 000</td><td>60 000</td><td>70 000</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\dfrac{4}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{12}{64}$</td><td>$\dfrac{4}{8}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{29}{64}$</td><td>$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{64}$</td><td>$\dfrac{3}{64}$</td><td>$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{64}$</td></tr>
</table>
E(X) = $(24+87+60+18+35)\times\dfrac{10000}{64}=35\,000$.</td><td>1½</td></tr>
</table>

III	Eléments des réponses	Notes
1	$z'\times\overline{z}=\frac{1}{r}e^{i(\pi+\theta)}\times re^{-i\theta}= \ e^{i\pi}=-1$.	½
2	$(\overrightarrow{u}\ ,\overrightarrow{OM})=\theta$, $(\overrightarrow{u}\ ,\overrightarrow{OM'})=\pi+\theta$, donc $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=(\pi+\theta)-\theta=\pi$ d'où O , M et M'sont alignés. ▶**OU :** $\frac{z'}{z}=-\frac{1}{r^2}$ **;** $z'=-\frac{1}{r^2}z$ donc $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{r^2}\overrightarrow{OM}$ et O , M et M'sont alignés.	½
3.a	$\|z-1\|=\|z_M-z_A\|=AM=1$	½
3.b	$\|z'+1\|=\left\|\frac{-1}{\overline{z}}+1\right\|=\left\|\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right\|=\frac{\|\overline{z-1}\|}{\|\overline{z}\|}=\frac{\|z-1\|}{\|\overline{z}\|}=\frac{1}{\|\overline{z}\|}$; $\|z'\|=\frac{\|-1\|}{\|\overline{z}\|}=\frac{1}{\|\overline{z}\|}$ d'où |z' +1 | = |z'|. $\|z_{M'}-z_B\|=\|z_{M'}\|$; BM' = OM' ; M' décrit la médiatrice (d) de [OB].	1
4	z' = – z ; $-z\times\overline{z}=-1$; $z\times\overline{z}=1$; $\|z\|^2=1$; $OM^2=1$; OM = 1 donc M appartient au cercle (C') de centre O , de rayon 1 , avec M appartient à (C) .Donc les points M sont les deux points d'intersection de (C) et (C'). ▶**OU :** |– z+1| = |– z | ; | z – 1| = |z| ; AM = OM ; M décrit la médiatrice (D) de [OA]. Ainsi les points M sont les deux points d'intersection de (D) et de (C).	1

<table>
<tr><th>IV</th><th colspan="2">Eléments des réponses</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>A.1</td><td colspan="2">z'= y'–2x + 2 et z'' = y'' – 2
z'' +2 – 4(z' + 2x – 2) + 4(z + x^2 – 2x) = $4x^2$ – 16 x + 10
z'' – 4z' + 4z = 0</td><td>½</td></tr>
<tr><td>A.2</td><td colspan="2">r^2 – 4r + 4 = 0 ; r = 2 racine double ; z = (Ax + B)e^{2x} et y = (Ax + B)e^{2x} + x^2 –2x</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A.3</td><td colspan="2">y(0) = 1 ; B = 1
y'(0) = 1 avec y'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} + 2x – 2 ; A + 2B = 2 ; A = 0 .
Donc y = e^{2x} + x^2 – 2x.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.1.a</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{2x}+x(x-2)]=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[e^{2x}+x(x-2)]=+\infty$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B.1.b</td><td colspan="2">f(1) = 6,39 et f(–1,5) = 5,30 .</td><td>½</td></tr>
<tr><td>B.2.a</td><td colspan="2">f'(x) < 0 pour x < 0 ; f'(x) > 0 pour x > 0.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.2.b</td><td><table><tr><td>x</td><td>– ∞</td><td></td><td>0</td><td></td><td>+ ∞</td></tr><tr><td>f '(x)</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>+ ∞</td><td>↘</td><td>1</td><td>↗</td><td>+ ∞</td></tr></table></td><td>B.3
 </td><td>B.2.b
½
B.3
1</td></tr>
<tr><td>B.4.a</td><td colspan="2">F'(x) = f(x) > 0 pour x ≥ 0(min (f(x)) =1) donc F est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B.4.b</td><td colspan="2">f(t) > 0 et x ≥ 0 donc $\int_0^x f(t)dt\geq0$ c.à.d. F(x) ≥ 0.
▶**OU :** F est croissante et F(0) = 0 , donc F(x) ≥ 0.</td><td>1</td></tr>
</table>