وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع علوم الحياة	دورة سنة 2007 العادية
عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة تايضايرلا المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I– (4 points).

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\,)$, on donne les points A (1 ; 1 ; 0), B (2; 0 ; 0), C (1; 3; –1), E (2 ; 2 ; 2) et le plan (P) d'équation $x + y + 2z - 2 = 0$.

1) a- Vérifier que (P) est le plan déterminé par A, B et C.
b- Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (P).
c- Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre EABC.

2) On désigne par L le milieu de [AB] et par (Q) le plan passant par L et parallèle aux deux droites (AE) et (BC).
a- Ecrire une équation du plan (Q).
b- Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
c- Démontrer que la droite (d), intersection des plans (P) et (Q), est parallèle à (BC).

II– (4 points).

Dans une entreprise il y a 20 employés répartis dans deux départements selon le tableau suivant :

	Département technique	Département administratif
Femmes	3	5
Hommes	10	2

1) Le directeur de l'entreprise veut offrir un cadeau à l'un des employés; pour cela il choisit au hasard un employé de cette entreprise.
On considère les événements suivants :
F : « l'employé choisi est une femme ».
H : « l'employé choisi est un homme ».
T : « l'employé choisi est du département technique ».
A : « l'employé choisi est du département administratif ».
a- Calculer les probabilités suivantes :
$P(F / T)$, $P(F / A)$, $P(F \cap T)$ et $P(F)$.
b- Sachant que l'employé choisi est un homme, quelle est la probabilité qu'il soit du département technique ?

2) Dans une autre occasion, le directeur de l'entreprise choisit au hasard et simultanément **deux** employés du département technique et il choisit aussi au hasard **un** employé du département administratif.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de femmes choisies.
a- Vérifier que $P(X = 1) = \dfrac{95}{182}$.
b- Déterminer la loi de probabilité de X.

III– (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on donne les points E, F, G d'affixes respectives $z_E = 2i$, $z_F = -2i$, $z_G = -1 + i$ et soit M un point d'affixe z.

1) a- Trouver l'ensemble (T) des points M tels que $|z-2i| = \sqrt{2}$.

b- Montrer que G est un point de (T).

2) a- Sur quelle ligne (L) se déplace le point M lorsque $\left|\dfrac{z-2i}{z+2i}\right| = 1$?

b- Déterminer l'affixe z_0 d'un point W de (L) telle que $|z_0 - 2i| = 3$.

3) Soit A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B telles que $z_A = z_F + z_G$ et $z_B = z_F \times z_G$.

a- Ecrire les complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b- Démontrer que les points O, A et B sont alignés.

IV– (8 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty , 0[\cup] 0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{4}{e^x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Montrer que l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C).

c- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

2) Démontrer que le point S (0 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

3) a- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux racines α et β et vérifier que : $1,7 < \alpha < 1,8$ et $-3,2 < \beta < -3,1$.

4) Tracer (d), (D) et (C).

5) a- Prouver que $f(x) = x + 3 - \dfrac{4e^x}{e^x - 1}$.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

6) Soit g la fonction réciproque de f sur $] 0, +\infty[$.
Démontrer que l'équation f(x) = g(x) n'admet pas de racines.

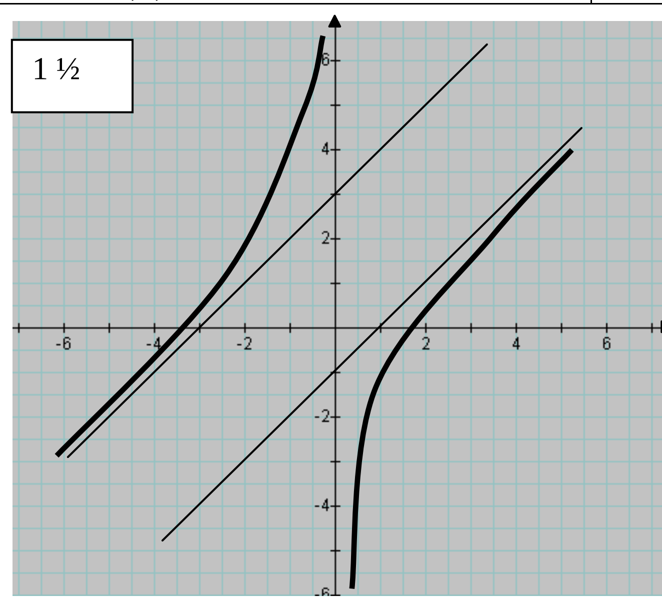
.

Q1	MATH SV PREMIERE SESSION-2007	Notes
1-a	◇ $1 + 1 + 0 - 2 = 0$; $A \in (P)$ ◇ $2 + 0 + 0 - 2 = 0$; $B \in (P)$ ◇ $1 + 3 - 2 - 2 = 0$; $C \in (P)$ OU $\vec{AM}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$; $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $(P) : x + y + 2z - 2 = 0$	½
1-b	$\vec{AE}(1;1;2)$ et $\vec{N_P}(1;1;2)$; (AE) est perpendiculaire au plan (P).	½
1-c	$S = \frac{1}{2} \lVert \vec{AB} \wedge \vec{AC} \rVert = \frac{\sqrt{1+1+4}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. $V = \frac{1}{3} S \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 1$ OU : $V = \frac{1}{6} \lvert \vec{AE}.(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \rvert = \frac{1}{6} \lvert 1+1+4 \rvert = 1$	1
2-a	$\vec{LM}.(\vec{AE} \wedge \vec{BC}) = 0$ avec $L(\frac{3}{2};\frac{1}{2};0)$; donc $\begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & y-\frac{1}{2} & z \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $(Q) : 7x + y - 4z - 11 = 0$.	1
2-b	$\vec{N_P}.\vec{N_Q} = -7 - 1 + 8 = 0$; (P) et (Q) sont perpendiculaires.	½

2-c	(BC) // (Q) et (BC) est une droite de (P) , donc (BC) est parallèle à la droite d'intersection de (P) et (Q).
	OU : $(d) = (P) \cap (Q)$: $\begin{cases} x + y + 2z - 2 = 0 \\ 7x + y - 4z - 11 = 0 \end{cases}$;
	$(d) : \begin{cases} x = t + \frac{3}{2} \\ y = -3t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$ $\vec{BC}(-1 ; 3 ; -1)$ et $\vec{V_d}(1 ; -3 ; 1)$ donc (BC) //(d).
		½

<table>
<tr><th>Q 2</th><th colspan="2">MATH SV PREMIERE SESSION-2007</th><th>Notes</th></tr>
<tr><td>1-a</td><td colspan="2">$P(F/T) = \frac{3}{13}$; $P(F/A) = \frac{5}{7}$; $P(F\cap T) = \frac{3}{20}$; $P(F) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1-b</td><td colspan="2">$P(T/H) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.</td><td>½</td></tr>
<tr><td>2-a</td><td>$P(X = 1) = \frac{3\times10}{C_{13}^{2}}\times\frac{2}{7} + \frac{C_{10}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{5}{7}$
$= \frac{285}{546} = \frac{95}{182}$</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="2">T</td><td colspan="2">A</td></tr>
<tr><td></td><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ou</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2-b</td><td>$P(X= 0) = \frac{C_{10}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{2}{7} = \frac{90}{546}$
$= \frac{15}{91}$</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="2">T</td><td colspan="2">A</td></tr>
<tr><td></td><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table></td><td rowspan="4">1½</td></tr>
<tr><td>$P(X= 2) = \frac{C_{3}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{2}{7} + \frac{3\times10}{C_{13}^{2}}\times\frac{5}{7}$
$= \frac{156}{546} = \frac{26}{91}$</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="2">T</td><td colspan="2">A</td></tr>
<tr><td></td><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ou</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>$P(X= 3) = \frac{C_{3}^{2}}{C_{13}^{2}}\times\frac{5}{7} = \frac{15}{546} = \frac{5}{182}$</td><td><table>
<tr><td></td><td colspan="2">T</td><td colspan="2">A</td></tr>
<tr><td></td><td>3F</td><td>10H</td><td>5F</td><td>2H</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2"><table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>P_i</td><td>$\frac{15}{91}$</td><td>$\frac{95}{182}$</td><td>$\frac{26}{91}$</td><td>$\frac{5}{182}$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Q3	MATH SV PREMIERE SESSION-2007	Notes
1-a	$\lvert z-2i\rvert=\sqrt{2}$ équivaut à EM=$\sqrt{2}$ et (T) est le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{2}$.	1
1-b	EG=$\lvert z_G - z_E\rvert = \lvert -1-i\rvert=\sqrt{2}$ d'où G$\in$(T).	½
2-a	$\left\lvert\dfrac{z-2i}{z+2i}\right\rvert=1$ équivaut à $\lvert z-2i\rvert=\lvert z+2i\rvert$ donc ME =MF et (L) est la médiatrice de [EF] qui est l'axe des abscisses.	½
2-b	W$\in$(L) donc $\lvert z_0-2i\rvert=\lvert z_0+2i\rvert=3$; Soit $z_0=x+iy$. $\lvert x+iy-2i\rvert=\lvert x+iy+2i\rvert$ équivaut à $x^2+(y-2)^2=x^2+(y+2)^2$ $y=0$ puis $x^2+4=9$; $x=\sqrt{5}$ ou x=$-\sqrt{5}$ et par suite $z_0=\sqrt{5}$ ou $z_0=-\sqrt{5}$ OU : W$\in$ x'x et EW=3 donc $OW^2=EW^2-OE^2=9-4=5$ et OW=$\sqrt{5}$ et par suite $z_0=\sqrt{5}$ ou $z_0=-\sqrt{5}$.	½
3-a	$z_A=-1-i=\sqrt{2}e^{i5\frac{\pi}{4}}, z_B=2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.	1
3-b	$\arg z_A=5\dfrac{\pi}{4}$, $\arg z_B=\dfrac{\pi}{4}$; $\arg z_A=\arg z_B+\pi$ donc O,A et B sont alignés OU $z_B=-2z_A$ soit $\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}$.	½

Q4	MATH SV — PREMIERE SESSION-2007	Notes
1-a	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1-\frac{4}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1-\frac{4}{0^-} = +\infty$ donc l'axe des ordonnées, d'équation x = 0, est asymptote à (C).	½
1-b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4}{e^x-1} = 0$	1
1-c	$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1-\frac{4}{e^x-1}-x-3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-4-\frac{4}{e^x-1})$ $= -4+4 = 0.$	½
2	Le domaine de définition de f est centré en O. $f(-x)+f(x) = -x-1-\frac{4}{e^{-x}-1}+x-1-\frac{4}{e^x-1} = -2+\frac{4e^x}{e^x-1}-\frac{4}{e^x-1}$ $= -2+4 = 2$, d'où S(0 ; 1) est un centre de symétrie de (C).	½
3-a	$f'(x) = 1+\frac{4e^x}{(e^x-1)^2} > 0.$ $\begin{array}{c c c c c c} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \Vert & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow +\infty & \Vert & -\infty \nearrow & +\infty \end{array}$	1
3-b	f est continue et strictement croissante de – ∞ à + ∞ sur] – ∞ ; 0[; l'équation f(x) = 0 admet sur cet intervalle une seule racine négative β ; f(– 3,2) = – 0,03 < 0 et f(– 3,1) = 0,088 > 0 donc – 3,2 < β < – 3,1. 	1 ½
4	De même l'équation f(x) = 0 admet sur]0 ; +∞ [une seule racine positive α ; f(1,7) = – 0,154 < 0 et f(1,8) = +0,0078 > 0 donc 1,7 < α < 1,8.	1
5-a	$x+3-\frac{4e^x}{e^x-1} = x-1+4-\frac{4e^x}{e^x-1} = x-1+\frac{4e^x-4-4e^x}{e^x-1} = x-1-\frac{4}{e^x-1}.$	½
5-b	$A = \int_2^3 (x+3-\frac{4e^x}{e^x-1})\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+3x-4\ln(e^x-1)\right]_2^3 = \frac{11}{2}+4\ln\left(\frac{e^2-1}{e^3-1}\right) = 1{,}122\ u^2$	1
6	f(x) = g(x) équivaut à f(x) = x ; $x-1-\frac{4}{e^x-1} = x$; $-1 = \frac{4}{e^x-1}$; $e^x = -3$ La dernière égalité est impossible ($e^x > 0$) donc l'équation n'a pas de racines.	½