عدد المسائل: ست

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: أربع ساعات

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I – (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	$z=-\sqrt{3}-i$. Un argument de $\bar{z}$ est :	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}=$	1	-1	e^3	3
3	$C_{10}^{6}-C_{9}^{6}=$	1	C_9^5	C_{19}^6	0
4	h est une fonction définie sur IR par $h(x)=\frac{1}{4+x^2}$; une primitive H de h est donnée par H(x) =	$\arctan\frac{x}{2}$	$\ln(4+x^2)$	$\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$	2arctanx
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}=$	1	0	e	$+\infty$
6	Si les affixes des points A, B et C vérifient la relation $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=2$; alors	C est le milieu de [AB]	B est le milieu de [AC]	A, B et C forment un triangle rectangle	A, B et C sont sur un même cercle

II– (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites (d_1) et (d_2)

définies par : (d_1) : $\begin{cases} x = m \\ y = m-1 \\ z = 1 \end{cases}$ et (d_2) : $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = t \\ z = -2t+4 \end{cases}$ (m et t sont des réels).

1) Démontrer que (d_1) et (d_2) sont orthogonales et non coplanaires.

2) Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ (–1; 1; 1) est orthogonal à (d_1) et (d_2).

3) Démontrer qu'une équation du plan (P) contenant (d_1) et parallèle à $\vec{n}$ est $x - y + 2z - 3 = 0$.

4) La droite (d_2) coupe le plan (P) en B. Déterminer les coordonnées de B.

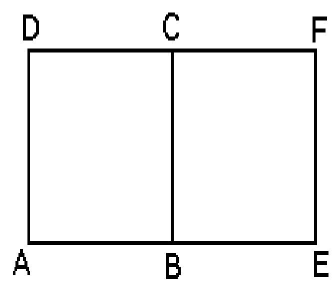
5) Démontrer que la droite (D) passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$ coupe la droite (d_1) au point A (1 ; 0 ; 1).

6) Soit (Q) le plan contenant (d_1) et perpendiculaire au plan (P) et M un point variable de (d_2). Démontrer que la distance de M à (Q) est égale à AB.

III– (3 points)

Dans un plan orienté, on donne un rectangle direct AEFD tel que : $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (2π), $AE = 2\sqrt{2}$ et $AD = 2$.

On désigne par B et C les milieux respectifs de [AE] et [FD].
Soit S la similitude plane directe qui transforme A en C et E en B.



1) a- Déterminer le rapport k et un angle α de S.
b- Montrer que S (F) = E et déduire S (D).

2) Soit W le centre de S et soit h la transformation définie par h = S o S.
a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.
b- Trouver h (D) et h (F) et construire le point W.

3) On désigne par I le milieu de [BE].
a- Démontrer que W, C et I sont alignés.
b- Exprimer $\overrightarrow{WC}$ en fonction de $\overrightarrow{WI}$.

4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $z_B = \sqrt{2}$ et $z_D = 2i$.
a- Trouver la forme complexe de S.
b- Déterminer l'affixe de W.

IV– (2 points)

Monsieur Khalil a trois fils : Sami, Farid et Zahi mariés et pères de familles.
Les enfants de ces trois familles sont répartis selon le tableau suivant :

	Famille de Sami	Famille de Farid	Famille de Zahi
Filles	2	1	3
Garçons	2	3	1

Le grand père Khalil décide de choisir au hasard **un enfant de chaque famille** pour l'accompagner à son village.

1) Quelle est la probabilité qu'il choisisse trois filles?

2) Soit les événements suivants :

F : «L'enfant choisi de la famille de Sami est une fille ».
G: «L'enfant choisi de la famille de Sami est un garçon ».
A: «Les trois enfants choisis sont deux filles et un garçon ».

a- Démontrer que la probabilité p (A/F) est égale à $\frac{5}{8}$.

b- Calculer p (A/G) et p (A).

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles choisies par le grand père.
Déterminer la loi de probabilité de X.

V– (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (5 ; 0), F (3 ; 0) et la droite (δ) d'équation $x = \frac{25}{3}$.

Soit (E) l'ellipse de foyer F, de directrice (δ), d'excentricité **e** et dont A est un sommet principal.

1) a- Vérifier que $\mathbf{e} = \frac{3}{5}$.

b- Vérifier que le point A' (–5 ; 0) est l'autre sommet principal de (E) et en déduire le centre de (E).

c- Ecrire une équation de (E) et tracer (E).

d- Calculer l'aire du domaine limité par l'ellipse (E) et son cercle principal.

2) Soit G et G ' les points de (E) d'abscisse 3.

a- Ecrire une équation de la tangente (D) en G à (E) et une équation de la tangente (D') en G ' à (E).

b- Vérifier que les droites (D), (D') et (δ) se coupent en un même point H sur l'axe des abscisses.

c- Montrer que tan $\widehat{FHG} = \mathbf{e}$.

VI– (7points)

A- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + xe^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *(unité 2 cm).*

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) a- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de f ' et en déduire que f ' (x) > 0.

c- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

d- Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (d) d'équation y = x.

4) Montrer que l'équation f(x) = 1 admet une racine unique α et vérifier que 0,65 < α < 0,66.

5) Tracer (d), (T) et (C).

6) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote (d) et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1.

7) On désigne par g la fonction réciproque de f et par (G) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Préciser l'asymptote et la direction asymptotique de (G) et tracer (G).

B- Soit f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = x + x^n e^{-x}$ (n est un entier naturel non nul)

et soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 [f_n(x) - x]\,dx$.

1) Déterminer la valeur de U_1.

2) Montrer que $0 \leq x^n e^{-x} \leq 1$ sur [0 ; 1] et en déduire que la suite (U_n) est bornée.

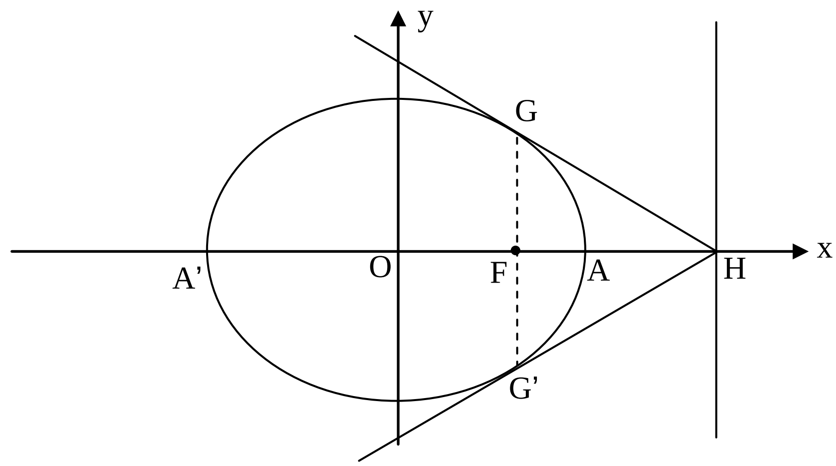
3) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier.

Q1	MATH SG PREMIERE SESSION 2007		N
1	$\overline{z} = -\sqrt{3} + i = 2(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.	d	4
2	$\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = e^{i(3\pi)} = -1.$	b	
3	$C_{10}^6 - C_9^6 = C_9^6 + C_9^5 - C_9^6 = C_9^5$.	b	
4	$\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dx}{1+(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$ OU : Parmi les réponses données, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$ est la seule qui a comme dérivée $\dfrac{1}{4+x^2}$.	c	
5	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = 1$	a	
6	$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = 2$; $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CA}$; C est le milieu de [AB] .	a	

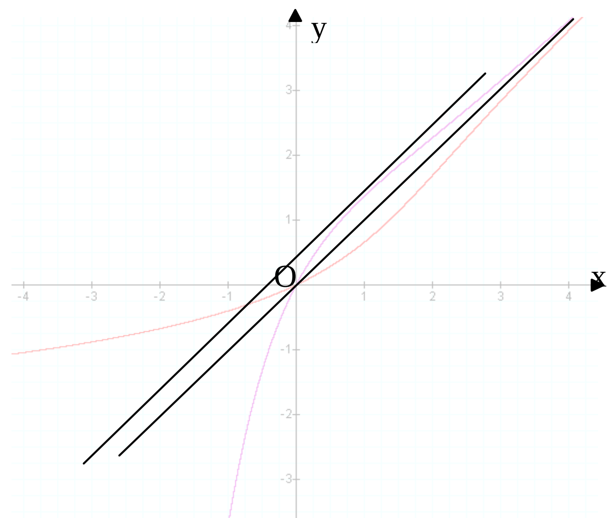
Q2	MATH SG PREMIERE SESSION 2007	N
1	$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = -1 + 1 = 0$, d'où (d_1) est orthogonale à (d_2). $(d_1)\cap(d_2)$: $\begin{cases} m = -t+1 \\ m-1 = t \\ 1 = -2t+4 \end{cases}$; $\begin{cases} m = 1 \\ t = 0 \\ 1 = 0+4 \text{ non} \end{cases}$ et (d_1) non parallèle à (d_2), d'où (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.	1
2	$\vec{n}.\vec{V}_1 = -1 + 1 = 0$; $\vec{n}.\vec{V}_2 = 1 + 1 - 2 = 0$.	½
3	$(d_1) \subset (P)$ car m – m +1 + 2 – 3 = 0 ; $\vec{N}_P \perp \vec{n}$ car $\vec{N}_P.\vec{n} = -1 - 1 + 2 = 0$. OU : I(0 ; – 1 ; 1)$\in (d_1)$; $\vec{IM}.(\vec{n}\wedge\vec{V}_1) = \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; x – y +2z – 3 = 0.	1
4	$(d_2)\cap(P) = \{B\}$; – t + 1 – t – 4t +8 – 3 = 0 ; – 6t = – 6 ; t = 1, d'où B (0 ; 1 ; 2)	1
5	$\vec{n}$ et $\vec{V}_1$ non colinéaires donc (D) n'est pas confondue avec (d_1). (D)$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda+1 \\ z = \lambda+2 \end{cases}$; A (1 ; 0 ; 1)$\in$(D) pour $\lambda = -1$ et A(1 ; 0 ; 1)$\in (d_1)$ pour m = 1 .	1
6	(Q) : $\vec{IM}.(\vec{V}_1\wedge\vec{N}_P) = 0$; $\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; 2x – 2(y + 1) + (z – 1)(– 2) = 0 ; x – y – 1 – z + 1 = 0 ; (Q) : x – y – z = 0.	1½

	$M(-t+1\,;t\,;-2t+4)$; $d(M\,;(Q)) = \dfrac{\lvert -t+1-t+2t-4\rvert}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. $\vec{AB}(-1;1\ 1)$; $AB = \sqrt{3}$. 🗣 OU : $(P) \perp (AB)$ et $(d_2) \perp (AB)$ donc $(d_2) // (P)$ et tous les points de (d_2) sont à égale distance de (P) ; or $d(B\,;(Q)) = BA$ car $(BA) \perp (Q)$.	
Q.3	MATH SG ◥ PREMIERE SESSION 2007	**N**
1-a	S : $A \longrightarrow C$ et S: $E \longrightarrow B$ $K = \dfrac{BC}{AE} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.	½
1-b	$S(E) = B$; $\dfrac{BE}{EF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BE}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. D'où $S(F) = E$. $A \longrightarrow C$ donc S(D) est le 4ème sommet du rectangle direct de sommets C, B, E. car $E \longrightarrow B$ AEFD est un rectangle direct , soit S(D) = F. $F \longrightarrow E$	1
2-a	h = SoS c'est donc une similitude de centre W d'angle $-\pi$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$ d'où c'est une homothétie $h\left(W, -\dfrac{1}{2}\right)$.	½
2-b	h(D) = SoS(D) = S(F) = E et h(F) = SoS(F) = S(E) = B. D'où $\{W\} = (ED) \cap (BF)$.	1
3-a	C milieu de [DF] donc h(C) est le milieu de [BE] d'où h(C) = I et W, I, C alignés.	1
3-b	$\overrightarrow{WI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{WC}$, $\overrightarrow{WC} = -2\overrightarrow{WI}$.	½
4-a	$z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} z + b$; $z' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} i z + b$. $S(A) = C$; $z_C = b = \sqrt{2} + 2i$; $z' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} i.z + \sqrt{2} + 2i$ **1** **4-b** $z_W = \dfrac{\sqrt{2}+2i}{1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2}{3} i$ ½	
QIV	MATH SG ◥ PREMIERE SESSION	N
1	$P(3\ \text{filles}) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{64} = \dfrac{3}{32}$	1
2a	A/F est l'événement: Une fille de la famille de Farid et un garçon de celle de Zahi ou un garçon de la famille de Farid et une fille de celle de Zahi. $P(A/F) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$	½
2b	A/G est l'événement : Une fille de la famille de Farid et une fille de celle de Zahi. $P(A/G) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$ et $P(A) = P(A\cap F) + P(A \cap G) = P(F) \times P(A/F) + P(G)\times P(A/G)$ $= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{16} = \dfrac{10}{32}+\dfrac{3}{32} = \dfrac{13}{32}$	1
3	$P(X=3) = \dfrac{3}{32}$; $P(X=2) = \dfrac{13}{32}$; $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} xi & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline pi & \frac{3}{32} & \frac{13}{32} & \frac{13}{32} & \frac{3}{32} \end{array}$	1½

	$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$; $P(X=1)=1-\left(\frac{3}{32}+\frac{13}{32}+\frac{3}{32}\right)=\frac{13}{32}$	

QV	MATH SG ◣ PREMIERE SESSION	N
1a	$e=\frac{AF}{AH}=\frac{2}{\frac{25}{5}-5}=\frac{3}{5}$	½
1b	$\frac{A'F}{A'H}=\frac{5+3}{\frac{25}{3}+5}=\frac{3}{5}$; et A’ appartient à l’axe focal (AF) donc A’ est un sommet principale de (E) .Le centre est le milieu O de $[AA']$.	½
1c	a = 5, c = 3 , $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, d’où l’équation de (E) est $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **1½** 	
1d	$A = \pi a^2 - \pi ab$ $= 25\pi - 20\pi = 5\pi\ u^2$ **1**	
2a	Pour $x=3$; $\frac{y^2}{16}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$; $y=\frac{16}{5}$ ou $y=-\frac{16}{5}$; $G\left(3;\frac{16}{5}\right)$ et $G'\left(3;-\frac{16}{5}\right)$ $(D): \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ donne $\frac{3x}{25}+\frac{\frac{16}{5}y}{16}=1$; $\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1$; $y=-\frac{3}{5}x+5$ $(D'): y=\frac{3}{5}x-5$ par symétrie par rapport à l’axe des abscisses.	1
2b	$\frac{3x}{5}-5=-\frac{3x}{5}+5$; $x=\frac{25}{3}$ et $y=0$ d’où $(D)\cap(D')=\{H\}$; $H=\left(\frac{25}{3},0\right)$	1
2c	$\tan\ F\hat{H}G=\frac{FG}{FH}=\frac{16/5}{25/3-3}=\frac{16}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{5}=e$	½

Q.6	MATH SG ◣ PREMIERE SESSION	**N**
A- 1.a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+xe^{-x})=+\infty+0=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)=0$ d’où (d) est asymptote à (C).	1
1.b	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+xe^{-x})=-\infty-\infty=-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+e^{-x}=+\infty$	1
2.a	$f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}=1+(1-x)e^{-x}$. $f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=e^{-x}(-1-1+x)=(x-2)e^{-x}$.	1

2.b	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline f''(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f'(x) & +\infty & \searrow & 1-\frac{1}{e^2} & \nearrow & 1 \end{array}$ $f'(x) \geq 1 - \dfrac{1}{e^2}$ d'où $f'(x) > 0$.	1
2.c	$f''(x)$ s'annule pour $x = 2$ en changeant de signe d'où (C) admet un point d'inflexion $I\left(2,\ 2 + \dfrac{2}{e^2}\right)$	1
2.d	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ **1** **3-** $f'(x) = 1$; $(1-x)e^{-x} = 0$; $x = 1$; $A(1,\ 1 + 1/e)$ **1**	
4	f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ donc $f(x) = 1$ admet une racine unique α. $f(0,65) = 0,98 < 1$ et $f(0,66) = 1,0011 > 1$ d'où $0,65 < \alpha < 0,66$.	1
5	$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}.dx = -\left[(x+1)e^{-x}\right]_0^1$ $= -\left[2e^{-1} - 1\right] = 1 - \dfrac{2}{e}$; $A = (1 - \dfrac{2}{e}).4$ $= 4 - \dfrac{8}{e} = 1{,}057\,\text{cm}^2$. **1½** 	1
7	L'asymptote de (G) est la droite d'équation $y = x$; la direction asymptotique de (G) est l'axe des abscisses.	1
B.1	$U_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$	½
2	$0 \leq x \leq 1$; $0 \leq x^n \leq 1$; $-1 \leq -x \leq 0$; $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ donc $0 \leq x^n e^{-x} \leq 1$ $0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 1.dx$; $0 \leq U_n \leq 1$, d'où (U_n) est bornée.	1
3	$U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_0^1 (x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x})dx = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)dx$; or $x - 1 \leq 0$ sur [0 ; 1] donc $x^n e^{-x}(x-1) \leq 0$ sur [0 ; 1] et $U_{n+1} - U_n \leq 0$ par suite (U_n) est décroissante. (U_n) décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ	1