المركز التربوي للبحوث والإنماء	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -٢- المدّة : أربع ساعات

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (2 points)

Pour chacune des questions suivantes, choisir la réponse juste en justifiant.

Questions	**Réponses Proposées**		
	A	**B**	**C**
1) $\arccos\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right) =$	$\frac{18\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{-13\pi}{5}$
2) Si un argument de Z est θ, alors un argument de $\frac{1-i}{(\overline{Z})^2}$ est	$2\theta-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}-2\theta$	$2\theta+\frac{\pi}{4}$
3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt}{x^2-1}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
4) Une solution de l'équation différentielle $y'-xy=0$ est	$y=e^{x^2}$	$y=e^{\frac{x^2}{2}}$	$y=\frac{x^2}{2}$
5) $\int_1^2\frac{2x}{x^2-2x+2}dx$	$\ln2+\frac{\pi}{2}$	$\ln2+\frac{\pi}{4}$	$2\ln2+\frac{\pi}{4}$

II- (2,5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points : A (0 ; 0 ; 2), B (0 ; 4 ; 0) et C (2 ; 0 ; 0).

1)

a) Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : 2x + y + 2z = 4.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

2) On considère (Δ), la hauteur relative à [BC] dans le triangle ABC, et soit $\vec{N}$ le vecteur de coordonnées (2,1,2).

a) Montrer $\vec{N}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de (Δ).

b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

3) Soit (Δ') la médiane issue de B dans le triangle ABC.

Montrer qu'une équation paramétrique de (Δ') est : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

4) Soit H le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ').

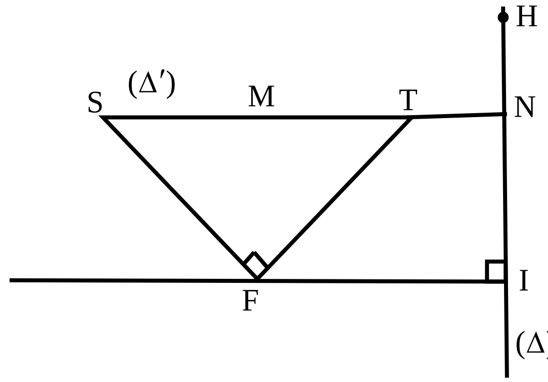
a) Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

b) En déduire le volume du tétraèdre OABC.

III- (2,5 points)

Dans la figure ci-contre:

- Le triangle FIH est un triangle rectangle isocèle en I.
- IF = IH = 3.
- N est un point variable de (HI).
- $(\acute{\Delta})$ est la parallèle menée de N à (IF).
- T, M et S sont trois points de $(\acute{\Delta})$ tel que NT = TM = MS.
- Le triangle SFT est rectangle en F.



Partie A

1) Montrer que M varie sur une ellipse(E) de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.

2) A est un point de [IF] tel que IA = 2 et A' est le symétrique de I par rapport à F.

a) Montrer que A et A' sont deux sommets de (E).

b) Déterminer le centre O de (E).Montrer que F est le milieu de [OA]. Déterminer le second foyer F'.

3) Le cercle de centre F et rayon OA coupe l'axe non focal de (E) en B et B'.

Montrer que B et B' sont deux sommets de (E).

4) L est un point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IH}$.

a) Montrer que L est un point de (E).

b) Calculer LF + LF', en déduire LF'.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OF}$.

1) Ecrire une équation de (E).Tracer (E).

2) (LI) coupe l'axe des ordonnées en G.

a) Montrer que (LI) est tangente à (E).

b) Calculer l'aire du domaine délimité par la région située à l'intérieur du triangle OGI et à l'extérieur de (E).

3)

(C) est l'hyperbole de centre $J(\sqrt{3},0)$ et d'asymptotes (JB) et (JB') ayant A l'un des sommets.

Ecrire une équation de (C).

IV- (3 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle et isocèle ABC tel que AB = AC = 4 cm et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. On note D le symétrique de A par rapport à B, O le milieu de [CD] et (T) le cercle de diamètre [CD].

On désigne par S la similitude directe qui transforme D en B et B en C.

1) Déterminer le rapport k et l'angle α de S.
2) Soit I le centre de S et h la transformation définie par h = $S o S$.
   a) Montrer que h(I) = I et h(D) = C.
   b) En déduire que I est un point du cercle (T) et que IC = 2ID.
   c) Montrer que ID = 4.
   d) Déduire que I est le quatrième sommet du rectangle et placer I.
3) Soit le repère orthonormé direct (A, $\vec{U}$, $\vec{V}$), tels que $\vec{U}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{V}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

   Déterminer la forme complexe de S.
4) Pour tout entier naturel n, On considère la suite des points (D_n) définie par D_0=D et D_{n+1}= S(D_n).
   (U_n) est la suite définie par U_n= Aire du triangle I D_nD_{n+1}
   a) Calculer U_n en fonction de n.
   b) Calculer en fonction de n le produit P=U_0 xU_1x………..xU_n.

V- (3 points)

On désigne par y un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].

Une urne contient 100 petits cubes dont 60 sont bleus et les autres rouges.

- Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
- Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, y % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1) Démontrer que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à 0,12 + 0,004y.
2) Déterminer y pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3) Déterminer y pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

Partie B : expérience 2

Dans cette partie on tire au hasard un cube de U.

Si le cube est bleu on le remet dans U et on tire de nouveau un cube.

Sinon on le met à part et on tire de nouveau et simultanément 2 cubes de l'urne U.

1) Calculer la probabilité de tirer un seul cube rouge.
2) Calculer la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur.

VI- (7 points)

Partie A

1) Soit f la fonction définie, sur $\left]0;+\infty\right[$, par f(x) = $\frac{1+2\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative.

   h la fonction définie, sur $\left]0;+\infty\right[$, par h(x) = $\frac{1}{x}$ et (C') sa courbe représentative.

   a) Montrer que la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à (C).

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.Déduire que (x'x) est une asymptote à (C).

c) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$

2) Soit g est la fonction définie, sur $]0;+\infty[$, par g(x)=1-x+2ln(x).

a) Etudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.

b) Montrer que g(x) = 0 admet 2 racines α et β tel que 3,51 < α < 3,52 .

c) Montrer que $f(x) - h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

d) En déduire la position relative de (C) et (C').

e) Tracer (C) et (C').

3) a) Calculer la dérivée de $d(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$ .En déduire la primitive F(x) de f vérifiant $F(1)= -3$

b) Montrer que $F(\alpha) - F(1) = 2 - \frac{2}{\alpha}$, interpréter le résultat graphiquement.

Partie B

On désigne par **(**I_n) la suite définie pour $n\geq 1$ par $I_n= F(n+1)-F(n)$

1) Montrer que $I_1 + I_2 < 2 - \frac{2}{\alpha}$.

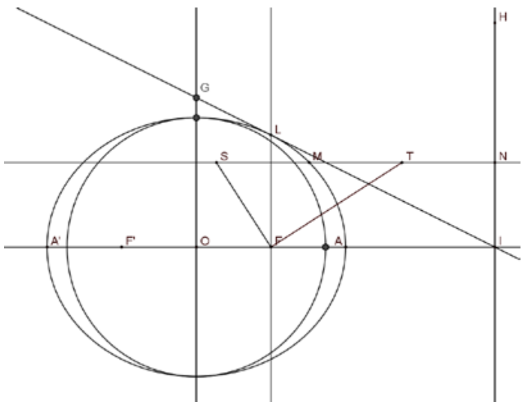
2) Calculer la somme $S_n= I_1+\ldots\ldots+I_n$ en fonction de n et calculer sa limite.

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: العلوم العامة نموذج رقم -٢- المدّة : أربع ساعات	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

	Question I	Note
1	B : $\arccos\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right) = \arccos\left(\cos\frac{9\pi}{10}\right) = \frac{9\pi}{10}$.	0,25
2	A : $\arg\frac{1-i}{(\bar{z})^2} = \frac{-\pi}{4} + 2\theta$.	0,25
3	B : Règle de l'hôpital $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x^4}.2x}{2x} = \sqrt{2}$	0,5
4	B : $\frac{y'}{y} = x,\ alors \int\frac{y'}{y} = \int x,\ alors \ln\lvert y\rvert = \frac{x^2}{2} + c',\ alors\ y = ce^{\frac{x^2}{2}}$ ou vérification	0,5
5	A : $\int_1^2 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \int_1^2 \frac{2}{x^2-2x+2}dx = \left[\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2 + 2\left[\arctan(x-1)\right]_1^2 =$ $\ln 2 + \frac{\pi}{2}$	0,5

	QuestionII	Note
1.a	$2x_A + y_A + 2z_A = 4$ et $2x_B + y_B + 2z_B = 4$ et $2x_C + y_C + 2z_C = 4$ ou $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$	0,25
1.b	AB=BC=$\sqrt{20}$	0,25
2.a	$\vec{N}$ est un vecteur normal du plan (ABC) $\vec{N}\wedge\overrightarrow{BC}$ est parallèle à (ABC) et orthogonal à (BC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ).	0,25
2.b	(Δ) est une hauteur issue de A son système d'équations est : $\begin{cases} x = 4m \\ y = 2m \\ z = -5m + 2 \end{cases}$	0,5
3.a	(Δ') = (BI) tel que I est le milieu de [AC].	0,25
3.b	(OH) est la droite d'intersection de 2 plans (OAH) et (OBH) Or (OAH) et (OBH) sont perpendiculaires à (ABC), donc (OH) est perpendiculaire à (ABC).	0,5
4	$H \in \Delta'$ pour t = $\frac{8}{9}$ et $H \in \Delta$ pour m = $\frac{2}{9}$ et H est l'orthocentre du triangle ABC les coordonnées du point H sont $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$	0,25
5	Aire du triangle ABC = 6 et OH = $\frac{4}{3}$ Le volume du tétraèdre = 8/3.	0,25

	Question III	Note
	Partie A	
		0,25
1	$\frac{MF}{MN} = \frac{1}{2}$,([FM] médiane dans le triangle STF vaut la moitié de ST) alors M varie sur l'ellipse de foyer F et de directrice (Δ) et d'excentricité ½.	0,25
2.a	A est un point de l'axe focal et AF=$\frac{1}{2}$ AI , donc A est un sommet de l'ellipse. De même A'F=$\frac{1}{2}$ A'I alors A' est le deuxième sommet.	0,25
2.b	O est le milieu de [AA'],OF=1 OA=2 donc F milieu de [OA]et F' milieu de OA'.	0,25
3	D'après Pythagore .OB=$\sqrt{3}$ = b car b=$\sqrt{a^2 - c^2}$ =$\sqrt{3}$.	0,25
4.a	LF=$\frac{1}{2}$ IF=$\frac{1}{2}$ LH' tel que H' projection de L sur (Δ). Donc L appartient à l'ellipse.	0,25
4.b	LF +LF'=2a=4 or LF=1,5 donc LF'=2,5.	0,25
	Parie B	
1	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$	0,25
2.a	L'équation de la tangente (T)au point L(1,1.5) à (E) est y= -0,5x+2 est celle de la droite (IL).	0,25
2.b	Aire du domaine = Aire du triangle OIG - $\frac{\pi ab}{4}$	0,25
3	(JB) perpendiculaire à (JB') alors l'hyperbole est équilatère tel que a=2-$\sqrt{3}$ Son équation est $(x-\sqrt{3})^2 - (y)^2 = (2-\sqrt{3})^2$	0,25

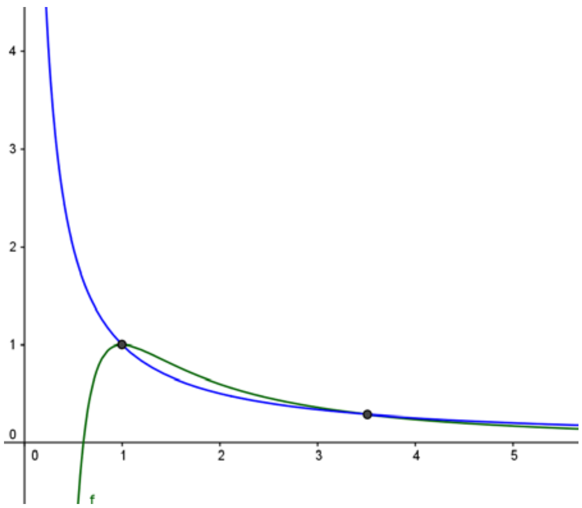
	Question IV	Note
1	$\frac{\text{BC}}{\text{DB}} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2} = \text{k}$ et $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.	0,25
2.a	$\text{h(I)} = \text{SoS(I)} = \text{S(I)} = \text{I}$ et $\text{h(D)} = \text{SoS(D)} = \text{S(B)} = \text{C}$ et $\alpha + \alpha = -\frac{\pi}{2}; \text{k} \times \text{k} = 2,$ alors h est une similitude de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.	0,25
2.b	$\left(\overrightarrow{\text{ID}}, \overrightarrow{\text{IC}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\text{k}\pi$, alors $\text{I} \in$ au cercle (T) de diamètre[CD] . IC = 2ID.	0,25
2.c	$CD^2 = 5ID^2$, donc ID=4	0,25
2.d	D'après la géométrie de la figure.	0,25

3	$z' = (1-i)z - 4 + 8i$.	0,5
4.a	$\frac{\text{Un+1}}{\text{Un}} = 2$ *donc la suite est géométrique de raison 2 dont le premier terme* U0=8	0,75
4.b	P=U_0 xU_1x……….xU_n= $8^{n+1}.2^{1+2+\cdots+n}$=$8^{n+1}.2^{\frac{n(n+1)}{2}}$	0,5

	Question V	Note
	Partie A	
1	P(L) = P(L/R) × P(R) + P(L/B) × P(B) = $\frac{y}{100}\times\frac{40}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{60}{100} = 0{,}004y + 0{,}12$	0,5
2	P(E) = P(E/B) × P(B) + P(E/R) × P(R) = $\frac{80-y}{100}\times\frac{40}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{60}{100}$ P(E) = P(L) *alors* $0{,}008y = 0{,}44$, *alors* $y = 55$.	0,5
3	P(L/B) = P(L) = P(L/R), alors y = 20.	0,5
	Partie B	
1	P(R)= p(B)x p(R) +P(R)x P(BB)=$\frac{6}{10}$x$\frac{4}{10}$ + $\frac{4}{10}$ x$\frac{C_{60}^2}{C_{99}^2}$	0,75
2	P(même couleur)= p(B)x p(B) +P(R)x P(RR)=$\frac{6}{10}$x$\frac{6}{10}$ + $\frac{4}{10}$ x$\frac{C_{39}^2}{C_{99}^2}$	0,75

	Question VI	Note
	Partie A	
1.a	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{\infty}{0} = -\infty$, *alors* $x = 0$ A.V.	0,25
1.b	$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} + \frac{1}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2} = 0 + 0 = 0$	0,5
1.c	$f'(x) = \frac{-4x\ln x}{x^4}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & 1 & \searrow & 0 \end{array}$	0,5
2.a	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline g(x) = 1 - x + 2\ln(x) & -\infty & \nearrow & -1+2\ln 2 & \searrow & -\infty \end{array}$	0,5
2.b	g(1)=0, g continue avec g(3,51)x g(3,52)< 0 alors l'équation g(x)=0 admet 2 racines α et 1 tel que 3,51 < α < 3,52 .	0,25

<table>
<tr><td>2.c</td><td>f(x) –h(x)= $\frac{g(x)}{x^2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>2.d</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0   1</td><td></td><td>α $+\infty$</td></tr>
<tr><td>f(x) –h(x)</td><td>-</td><td>0   +</td><td>0   -</td></tr>
<tr><td>position</td><td>(C’) au-dessus de (C)</td><td>(C’) au-dessous de (C)</td><td>(C’) au-dessus de (C)</td></tr>
</table>

(C) et (C’) admet 2 points communs d’abscisses 1 et α .</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2.e</td><td>
</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>3.a</td><td>d’(x)= -ln(x)/x^2 alors f(x) = $\frac{1}{x^2}$ -2 d’(x) donc F(x)= $\frac{-1}{x}$ -2d(x) +K= $\frac{-3-2\ln x}{x}$ +K.
or F(1)=-3 alors K= 0 et par suite F(x)= $\frac{-3-2\ln x}{x}$.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>3.b</td><td>F(α)-F(1)= $\frac{-3-2\ln\alpha+3\alpha}{\alpha}$ or g(α)=0 donc –2ln(α)=1-α et par suite
F(α) – F(1) = $2-\frac{2}{\alpha}$.
$2-\frac{2}{\alpha}$ =l’aire du domaine limité par (C) l’axe x’x et les deux droites x=1 et x=α</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td></td><td>Partie B</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$I_1 + I_2$=F(3)-F(1)=l’aire du domaine limité par (C) l’axe x’x et les deux droites x=1 et x= 3 or $3 < \alpha$ donc F(3)-F(1) $<$ F(α) – F(1) =l’aire du domaine limité par (C) l’axe x’x et les deux droites x=1 et x=α .</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Sn= I_1+…….+I_n = F(2)-F(1) +F(3)-F(2) +…………+F(n+1)-F(n) =
= F(n+1)-F(1)= $\frac{-3-2\ln(n+1)}{n+1}$ +3.
Lim Sn= 3 quand n→ $+\infty$.</td><td>1</td></tr>
</table>