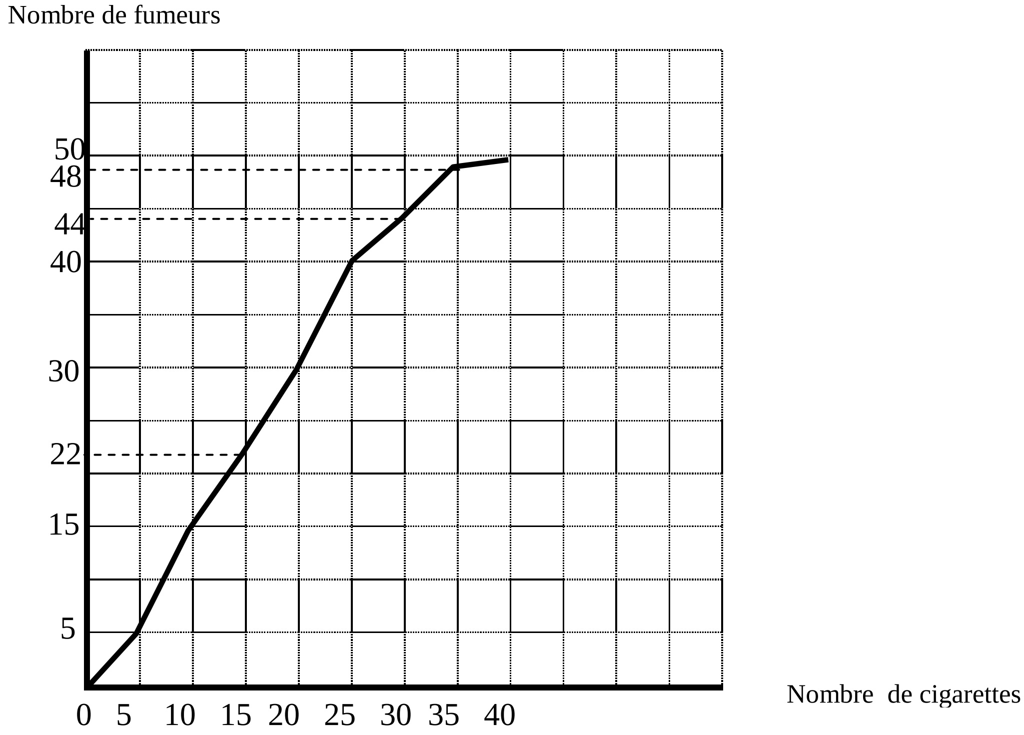
وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع الاجتماع والاقتصاد	دورة سنة ٢٠٠٤ الاستثنائية
عدد المسائل :اربع	مسابقة في الرياضيات المدة :ساعتان	الاسم : الرقم :

ملاحـظة يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المُرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (2 points)

Une enquête auprès de 50 fumeurs porte sur leur consommation quotidienne de cigarettes .
Le polygone suivant est celui des effectifs cumulés croissants du nombre de fumeurs .



1) Recopier et compléter le tableau des effectifs de cette distribution.

Nombre de cigarettes	[0 ;5[				[20 ;25[			[35 ;40]
Nombre de fumeurs	5		7		10			2

2) Déterminer , à l'unité près ,la médiane de cette distribution et donner une signification à la valeur ainsi trouvée.

II- (4 points)

Un employé reçoit une somme de 2 000 000 LL . Il dépense 20 % de cette somme le premier jour puis il dépense 20 % du reste le second jour et ainsi de suite pour les jours suivants.
On désigne par U_n ($n \geq 1$) le montant , en LL , dont dispose cet employé à la fin du **nième** jour.

1) Vérifier que $U_1 = 1\,600\,000$.

2) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

3) Calculer U_n en fonction de n.

4) A la fin de quel jour , le montant dont dispose cet employé devient -il pour la première fois inférieur à 500 000 LL ?

III-(4points)

Un sac contient **sept** boules :

une rouge portant le nombre n

deux jaunes portant chacune le nombre -5

quatre vertes portant chacune le nombre 4 .

On tire simultanément et au hasard **deux** boules de ce sac.

1) Démontrer que la probabilité de tirer **une** boule rouge et **une** boule verte est égale à $\frac{4}{21}$.

2) Calculer la probabilité de tirer **deux** boules vertes .

3) Calculer la probabilité de tirer **deux** boules de même couleur .

4) On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des deux nombres portés par les **deux** boules tirées .

a- Justifier que les valeurs possibles de X sont : - 5n ; 4n ; -20 ; 16 ; 25.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

c- Pour quelle valeur de n l'espérance mathématique E(X) est-elle égale à -1 ?

IV- (10 points)

A- Soit f la fonction définie, sur [-1 ;+∞ [, par $f(x) = x - 2 - 2xe^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à (C) .

b- Etudier , suivant les valeurs de x, les positions relatives de (C) et (d) .

c- Calculer f(0) et f(-1).

2) Le tableau ci-dessous donne le signe de f '(x).

x	–1		0,3		+∞
f '(x)		–	0	+	

Dresser le tableau de variations de f .

3)a- Tracer (d) et (C) .

b- Montrer graphiquement que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution positive α .

Vérifier que $2{,}4 < \alpha < 2{,}5$.

B- **Dans ce qui suit on suppose que** α = 2,45 .

Une usine fabrique un produit chimique liquide .

La fonction C_m définie, sur [0 ;10], par : $C_m(x) = 1+2(1 - x)e^{-x}$ traduit le coût marginal quotidien , pour cette fabrication .

x est exprimé en milliers de litres et $C_m(x)$ en millions LL.

Les coûts fixes s'élèvent à 2 millions LL.

1) Démontrer que la fonction C_T traduisant le coût total quotidien est donnée par $C_T(x) = x +2 + 2xe^{-x}$**.**

.

2) Le litre est vendu à 2000 LL et on suppose que la production est vendue dans sa totalité.

a- Démontrer que la fonction profit est donnée par $P(x) = x - 2 - 2xe^{-x}$.

b- Déterminer la quantité que doit produire quotidiennement l'usine pour que le profit soit nul .

L'usine réalise-t-elle de bénéfice lorsqu'elle produit quotidiennement 2 000 litres de ce liquide ? Justifier la réponse.

<table>
<tr><th colspan="2">Q</th><th></th><th>N</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>1</td><td>
<table>
<tr><td>Nombre de cigarettes</td><td>[0 ;5[</td><td>[5 ;10[</td><td>[10 ;15[</td><td>[15 ;20[</td><td>[20 ;25[</td><td>[25 ;30[</td><td>[30 ;35[</td><td>[35 ;40]</td></tr>
<tr><td>Nombre de fumeurs</td><td>5</td><td>10</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>
</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Graphiquement , la droite d'équation $y = 25$ coupe le polygone donné en un point d'abscisse x telle que $16{,}8 \le x \le 16{,}9$ d'où $x = 17$.

♦OU : Soit A(15 ;22) et B(20 ;30), (AB) : $\frac{y-30}{x-20} = \frac{8}{5}$.

Pour $y = 25$ on obtient $x = 16{,}875$ d'où $x = 17$.

♦OU : En utilisant la formule.

Interprétation: 25 personnes de ces fumeurs fument un nombre de cigarettes ≥17.</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">II</td><td>1</td><td>$U_1 = 2\,000\,000 - 2\,000\,000 \times \frac{20}{100} = 1\,600\,000$.</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$U_{n+1} = U_n - U_n\left(\frac{20}{100}\right) = 0{,}8\,U_n$.

C'est une suite géométrique de raison 0,8.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$U_n = U_1 q^{n-1} = 1\,600\,000\,(0{,}8)^{n-1}$.</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$U_n < 500\,000$

$(0{,}8)^{n-1} < \frac{5}{16}$; $(n-1)\ln(0{,}8) < \ln\left(\frac{5}{16}\right)$; $n - 1 > \frac{\ln\left(\frac{5}{16}\right)}{\ln(0{,}8)}$; $n > 6{,}21$.

A la fin du $7^{ième}$ jour le montant sera inférieur à 500 000 LL.</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="5">III</td><td>1</td><td>Nombre de cas possibles $C_7^2 = 21$.

Probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte $= \frac{C_1^1 C_4^1}{21} = \frac{4}{21}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Probabilité de tirer deux boules vertes = $\frac{C_4^2}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Tirer deux boules de même couleur, c'est tirer deux jaunes ou deux vertes

$p = \frac{C_4^2 + C_2^2}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4-a-</td><td>Les cas possibles : (RJ), (RV), (JJ), (JV), (VV).

$X(\Omega) = \{-5n,\ 4n,\ 25,\ -20,\ 16\}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4-b-</td><td>
<table>
<tr><td>X_i</td><td>-20</td><td>-5n</td><td>4n</td><td>16</td><td>25</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\frac{C_2^1 \times C_4^1}{21} = \frac{8}{21}$</td><td>$\frac{C_1^1 \cdot C_2^1}{21} = \frac{2}{21}$</td><td>$\frac{4}{21}$</td><td>$\frac{6}{21}$</td><td>$\frac{C_2^2}{21} = \frac{1}{21}$</td></tr>
</table>
</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="10">IV</td><td>4-c-</td><td>$E(X) = \frac{1}{21}(-160 - 10n + 16n + 96 + 25) = \frac{1}{21}(6n - 39)$.

$E(X) = -1.$; $6n - 39 = -21$; $n = 3$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A.

1-a-</td><td>$f(x) = x - 2 - 2xe^{-x}$; $D_f = [-1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 2 - \frac{2x}{e^x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x}{e^x} = 0$. (d): $y = x-2$ est asymptote à (C).</td><td>2</td></tr>
<tr><td>A.

1-b</td><td>$f(x) - (x - 2) = -2x\,e^{-x}$

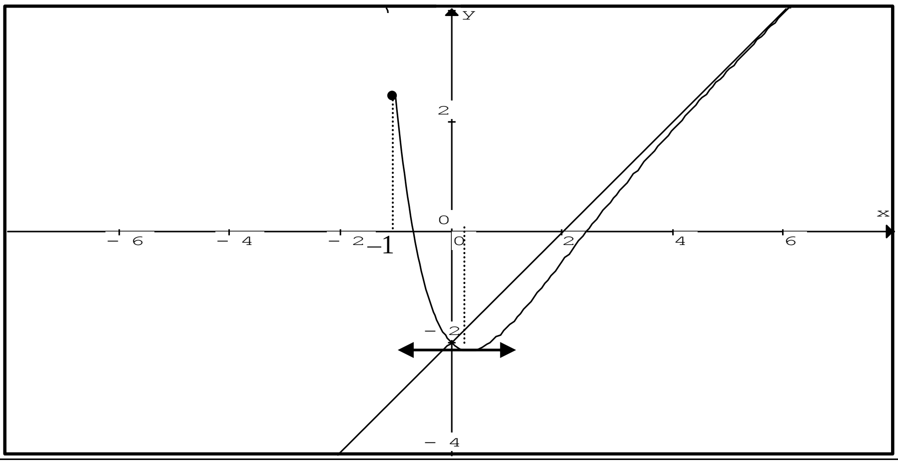
si $x = 0$ (C) rencontre (d) au point $(0 ; -2)$

si $x < 0$ (C) est au-dessus de (d)

si $x > 0$ (C) est au-dessous de (d).</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>A.

1-c</td><td>$f(0) = -2$ et $f(-1) = 2,436$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A.

2</td><td><table><tr><td>x</td><td>–1</td><td></td><td>0,3</td><td></td><td>+∞</td></tr><tr><td>f ′(x)</td><td></td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>2,436</td><td>↘</td><td>–2,144</td><td>↗</td><td>+∞</td></tr></table></td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>A.

3-a-</td><td>
</td><td>2 ½</td></tr>
<tr><td>A.

3-b-</td><td>Sur $[0 ; +\infty[$ (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point.

Donc $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

$f(2,4) = -0,0354$; $f(2,5) = 0,0895$,$f(2,4)<0$ et $f(2,5)>0$ donc $2,4<\alpha<2,5$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>B.1</td><td>$\alpha = 2,45$

$C'_T(x) = 1 + 2e^{-x} - 2x\,e^{-x} = 1 + 2(1 - x)e^{-x}$ et $C_T(0) = 2$</td><td>2 ½</td></tr>
</table>

		Donc $C_T(x)$ est le coût total. ♦**OU** : $C_T(x)$ est une primitive de $C_m(x)$ qui prend la valeur 2 pour $x = 0$.	
	B. 2-a-	Prix de vente d'une unité $2000 \times 1000 = 2$ millions. Prix de vente de x unités est $2x$. $P(x) = 2x - (x + 2 + 2x\,e^{-x}) = x - 2 - 2x\,e^{-x}$.	2
	B 2-b-	$P(x) = 0$ pour $f(x) = 0$ et $x \geq 0$, donc $x = 2{,}45$. Le profit est nul pour une fabrication de 2450 litres. Pour une production de 2000 litres $x = 2$ et $f(x) = -0{,}541$. L'usine perd 541 000 LL	2 ½