عدد المسائل :أربع

مسابقة في الرياضيات
المدة : ساعتان

الاسم :
الرقم :

ملاحظة : يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I - (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B tels que : $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

1) a- Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponentielle .

b-Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ; \vec{AB})$.

c- Montrer que le point B appartient au cercle (C).

2) A tout point M d'affixe z, non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z}}$.

a- Démontrer que $\bar{z}\,(z' - 1) = 2$.

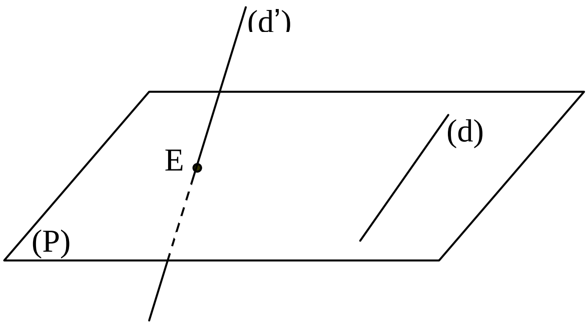
b-En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C), M décrit un cercle (T) à déterminer.

II - (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les droites (d) et (d') définies par :

$$(d) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (d') : \begin{cases} x = 2m \\ y = -m + 1 \\ z = m + 1 \end{cases}$$

(t et m sont deux paramètres réels).



1) Démontrer que (d) et (d') sont non coplanaires.

2) a- Montrer que x – y + z = 0 est une équation du plan (P) déterminé par O et (d).

b- Déterminer les coordonnées du point E intersection de (P) et (d').

c- Démontrer que la droite (OE) rencontre (d).

3) a- Calculer la distance du point O à la droite (d).

b- En déduire que le cercle ,du plan (P), de centre O et passant par E, est tangent à (d).

III - (9points)

Soit f la fonction définie sur] 0 ; $+\infty$ [par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln x}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité 2 cm .

1) a - Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

b - Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C) .

c - Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

x	0		e		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	1

a - Montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition et dresser son tableau de variations .

b - Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point G d'abscisse e.

c - Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion L.

d - Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α et vérifier que 0,75 < α < 0,76 .

3) Tracer (D) , (d) et (C) .

4) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations x = 1 et x = e .

IV - (4points)

On dispose de deux urnes U et V :

U contient **trois** boules numérotées 0 et **deux** boules numérotées 1.

V contient **cinq** boules numérotées de 1 à 5.

A - On tire au hasard **une** boule de chaque urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

1) Démontrer que P(X = 0) est égale à $\dfrac{3}{5}$.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

B - Dans cette partie on place les **dix boules** des urnes U et V dans une même urne W.

On tire simultanément et au hasard **deux** boules de l'urne W.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) On désigne par q le produit des deux numéros portés par les deux boules tirées.

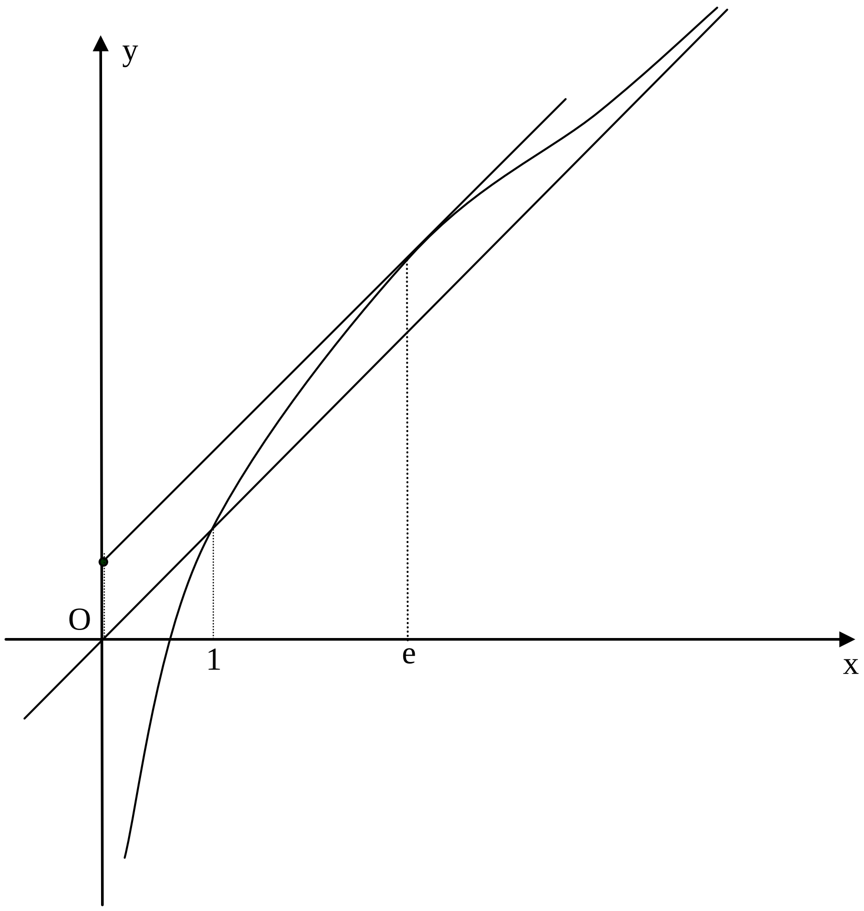
a - Montrer que la probabilité P(q = 0) est égale à $\dfrac{8}{15}$.

b - Calculer la probabilité P(q < 4).

Q		Eléments de réponse	N
I	1-a	$z_B - z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$	
	1-b	$(\vec{u}\,;\vec{AB}) = \arg(Z_{\vec{AB}}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{3}$	
	1-c	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert = 1$ donc B appartient à (C).	
	2-a	$\bar{z}\,(z'-1) = \bar{z}\,(\frac{\bar{z}+2}{\bar{z}} - 1) = \bar{z}\left(\frac{2}{\bar{z}}\right) = 2.$	
	2-b	Lorsque M' décrit (C) alors AM' = 1 donc $\lvert z'-1 \rvert = 1$ par suite $\lvert \bar{z} \rvert = 2$ c.à.d $\lvert z \rvert = 2$ et M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.	

II	1	$\vec{V}$ (1 ; 2 ; 1) et $\vec{V'}$ (2 ; –1 ; 1) ; $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires, donc (d) et (d') ne sont pas parallèles. Etudions l'intersection de (d) et (d') : t + 1 = 2m ; 2t = – m + 1 ; t – 1 = m + 1 On prend 2t = – m + 1 ; t – 1 = m +1, on obtient t = 1 et m = –1, ces valeurs ne vérifient pas l'équation t + 1 = 2m. Donc (d) et (d') sont non coplanaires. ►Ou : soit L (1 ; 0 ; –1) un point de (d) et J (2 ; 0 ; 2) un point de (d') ; $\vec{LJ}.(\vec{V} \wedge \vec{V'}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$	
	2-a	Par vérification : O est un point de (P) (d) est incluse dans (P) car t + 1 –2t + t – 1 = 0 pour tout réel t. ►Ou : M(x ; y ; z) appartient à (P) ssi $\vec{OM}.(\vec{OL} \wedge \vec{V}) = 0$ ce qui donne x – y + z = 0	
	2-b	2m + m –1 + m + 1 = 0 ; m = 0 donc E (0 ; 1 ; 1)	
	2-c	(OE) est une droite du plan (P), (OE) et (D) sont coplanaires et elles ne sont pas parallèles ($\vec{OE}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires), donc elles sont sécantes. ►Ou : On détermine un système d'équations paramétriques de (OE) et on démontre qu'elle coupe (d).	
	3-a	distance (O/ (d)) = ….. = $\sqrt{2}$.	
	3-b	OE = $\sqrt{2}$ = distance (O/ (d)) ; donc (C) est tangent à (d).	

III	1-a	$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; y'y est une asymptote à (C).	

	1-b	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ donc la droite (d) d'équation y = x est une asymptote à (C) en $+\infty$.	
	1-c	$f(x)-x=2\frac{\ln x}{x}$. Pour x = 1, (C) rencontre (d). Pour 0 < x < 1, f(x) – x < 0 donc (C) est au-dessous de (d). Pour x > 1, (C) est au-dessus de (d).	
	2-a	$f'(x)\geq 1-\frac{1}{e^3}>0$ donc f est strictement croissante. $\begin{array}{c\|c\|ccc} x & 0 & & & +\infty \\ \hline f(x) & & & & +\infty \\ & & -\infty & \nearrow & \end{array}$	
	2-b	$y=f'(e)(x-e)+f(e)$; $y=x-e+e+\frac{2}{e}=x+\frac{2}{e}$.	
	2-c	f ”(x) s'annule pour x = $e\sqrt{e}$ en changeant de signe, donc (C) admet un point d'inflexion L d'abscisse $e\sqrt{e}$.	
	2-d	f est continue et change de signe sur son domaine, f(x) = 0 admet au moins une racine α, en plus f est strictement croissante, donc α est unique. f (0,75) ×f (0,76) = –0,017×0,377 < 0, donc 0,75 < α < 0,76.	
	3		
	4	A= $\int_1^e 2\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\ln^2 x\right]_1^e = 1\,u^2$, donc A = 4 cm^2.	

IV	A-1	Pour obtenir un produit égal à 0 il suffit de tirer de U une boule numérotée 0, d'où la probabilité est égale à $\frac{3}{5}$. ►Ou : Nombre de tirages possibles est égal à 5 ×5 = 25	

		$P(X = 0) = \dfrac{3\times 5}{5\times 5} = \dfrac{3}{5}$.	
	A-2	<table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>p_i</td><td>3/5</td><td>2/25</td><td>2/25</td><td>2/25</td><td>2/25</td><td>2/25</td></tr></table>	
	B-1	$C_{10}^{2} = 45$.	
	B-2 a	Pour obtenir un produit égal à 0 on doit avoir l'un des tirages suivants : Deux boules numérotées 0 ou {0 ; a} avec a = 1, 2, 3, 4, 5. Nombre de cas favorables est $C_3^2 + C_3^1 \times C_7^1 = 24$ $P\ (q = 0) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$	
	B-2 b	$P\ (q < 4) = P\ (q = 0) + P\ (q = 1) + P\ (q = 2) + P\ (q = 3)$ $= \dfrac{8}{15} + \dfrac{C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{45} = \dfrac{33}{45} = \dfrac{11}{15}$.	