امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع العلوم العامة

دورة سنة ٢٠٠٤ العادية

عدد المسائل : ستة

مسابقة في الرياضيات
المدة : أربع ساعات

الاسم :
الرقم :

ملاحظة : يُسمح بإستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I - (2 points)

Soit f la fonction définie, sur [–3 ; 3], par $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.
2) Tracer la courbe (C).
3) On considère l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.
   Montrer que (C) est une partie de (E) et tracer (E).
4) A l'aide du changement de variable $x = 3\cos\theta$, on trouve :
   $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 6\int_{0}^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$ (on ne demande pas de démontrer cette égalité).
   Déduire de cette égalité l'aire du domaine limité par (E).

II - (3points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
On donne les droites (d) et (d') définies par :

$$(d):\begin{cases}x=2t+1\\ y=-2t-1\\ z=t+2\end{cases}\quad \text{et}\quad (d'):\begin{cases}x=m\\ y=2m-3\\ z=2m\end{cases}$$ (t et m sont deux paramètres réels) .

1) Montrer que les droites (d) et (d') sont concourantes au point A (1 ; –1 ; 2) et qu'elles sont perpendiculaires.
2) Ecrire une équation du plan (P) déterminé par (d) et (d') .
3) Dans le plan (P) on donne la droite (D) définie par :

$$(D):\begin{cases}x=3\lambda-1\\ y=-1\\ z=3\lambda\end{cases}\quad (\lambda \text{ est un paramètre réel}) .$$

   a- Démontrer que la droite (D) est une bissectrice de l'un des angles formés par (d) et (d').
   b- E (-1 ; -1 ; 0) est un point de (D) ; on désigne par (C) le cercle du plan (P) , de centre E , tangent en T à (d) et en S à (d').
      Déterminer la nature du quadrilatère ATES et calculer la longueur AT.
   c- Ecrire une équation du plan médiateur de [AE] et en déduire un système d'équations paramétriques de la droite (TS).

III - (2,5points)

Une agence de tourisme propose à ses clients des voyages de 7 jours avec deux options : pension complète ou demi - pension .
L'agence publie l'annonce publicitaire suivante :

Option / Destination	Pension complète	Demi - pension
France	1 500 000 LL	1300 000 LL
Italie	1 250 000 LL	1100 000 LL
Turquie	800 000 LL	700 000 LL

Cette agence estime que 25 % de ses clients choisissent la France, 35 % l'Italie et le reste la Turquie et que parmi les clients de chaque destination, 60 % choisissent la pension complète.
On interroge au hasard un client.

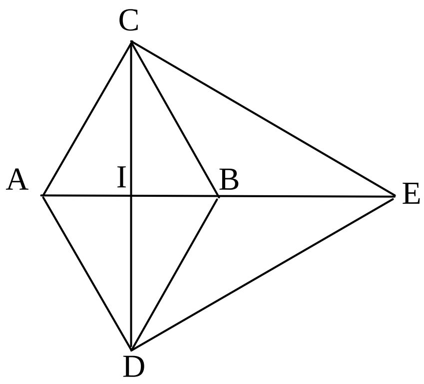
Soit les événements suivants :
F : « le client interrogé a choisi la France ».
I : « le client interrogé a choisi l'Italie ».
T : « le client interrogé a choisi la Turquie ».
C : « le client interrogé a choisi la pension complète ».

1) a- Calculer les probabilités suivantes :
$P(C\cap F)$; $P(C\cap I)$; $P(C\cap T)$ et $P(C)$.
b- Le client interrogé a choisi la pension complète, quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'Italie ?

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée à l'agence par un voyageur.
a- Déterminer la loi de probabilité de X .
b- Calculer l'espérance mathématique E(X). Que représente le nombre ainsi trouvé ?
c- Estimer la somme reçue par l'agence lorsqu'elle sert 200 voyageurs.

IV - (3points)

Dans la figure ci-contre,
ABC , ADB et CDE sont trois triangles équilatéraux directs tels que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.



On désigne par I le milieu de [AB] .

1) Montrer que AE = 2AB.

Soit S **la similitude directe de centre** W, **de rapport** k **et d'angle** θ **qui transforme** A **en** B **et** E **en** D.

2) Déterminer k et vérifier que $\theta = \frac{-2\pi}{3} \quad (2\pi)$.

3) On désigne par (T) le cercle circonscrit au triangle ACE.
Démontrer que le transformé de (T) par S est le cercle (T ') de diamètre [BD] et déduire que l'image du point C par S est le point J milieu de [DE].

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{u} , \overrightarrow{v})$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AI}$.

a- Déterminer les affixes des points B , C , D et E.
b- Donner la forme complexe de S et préciser l'affixe de son centre W.

5) Soit S' la similitude directe de centre W, de rapport 2 et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

a- Déterminer la nature et les éléments de la transformation S'oS .
b- Calculer l'affixe du point A' transformé de A par S'oS .

V - (2,5points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i} , \overrightarrow{j})$ (unité 3 cm) ,
on donne les paraboles (P) et (P') d'équations respectives $y^2 = 2x - 1$ et $x^2 = 2y - 1$.

1) Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de chacune de ces deux paraboles.
2) Vérifier que le point A (1 ; 1) est commun à (P) et (P') et démontrer que (OA) est une tangente commune aux deux paraboles.
3) Démontrer que la perpendiculaire (d) en O à (OA) est une tangente commune à (P) et (P').
4) Tracer (d) , (P) et (P').
5) L'aire du domaine limité par (P), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ vaut 3 cm^2.
Déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par (P), (P') , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

VI - (7 points)

A- Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = 2$.
On pose $z = y - 1$.

1) Former une équation différentielle (E_1) satisfaite par z et résoudre (E_1).

2) Déduire la solution générale de (E) et trouver la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} , \vec{j})$, est tangente en O à l'axe des abscisses.

B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i} , \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3) Trouver $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec son asymptote (d).

6) Tracer (d) et (C).

7) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) , son asymptote (d) et l'axe des ordonnées .

8) Soit g la fonction donnée par $g(x) = \ln(f(x))$, et (G) sa courbe représentative .

a- Justifier que le domaine de définition de g est $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations .

b- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est une asymptote à (G) .

c- Résoudre chacune des équations $g(x) = 0$ et $g(x) = -2x$.

d- Tracer (D) et (G) dans un autre repère.

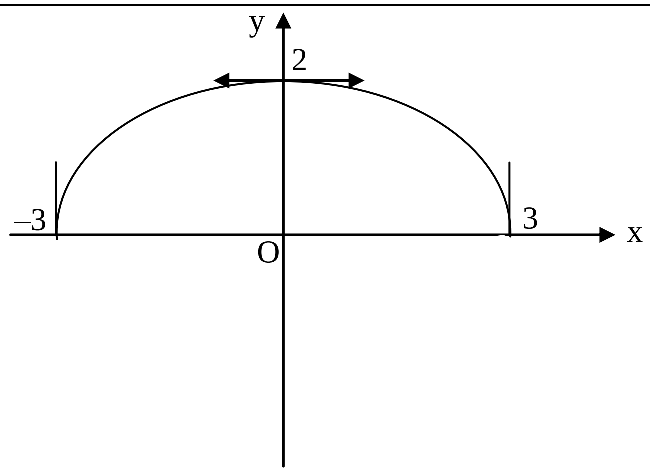
Barème

<table>
<tr><td colspan="3">SCIENCES GENERALES MATH</td><td>1ère SESSION(2004)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Eléments de réponse</td><td>N</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I</td><td>1</td><td>

$f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt{9-x^2}}$

$$\begin{array}{c|ccccc|} x & -3 & & 0 & & 3 \\ \hline f'(x) & +\infty & + & 0 & - & -\infty \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 2 & \searrow & 0 \end{array}$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>

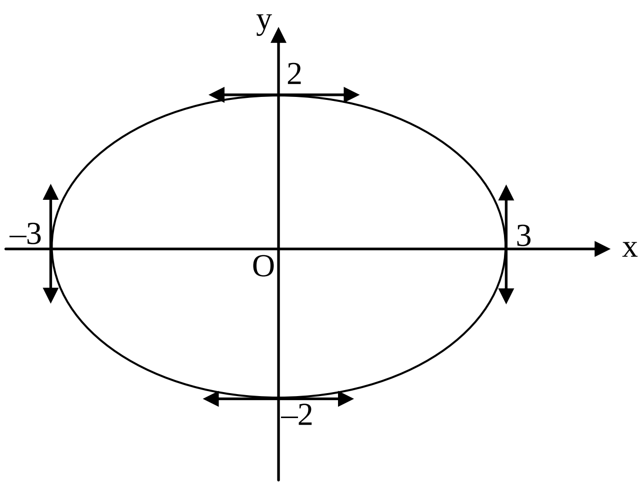


</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>

$(E) : \dfrac{y^2}{4} = 1 - \dfrac{x^2}{9}$, $y^2 = \dfrac{4}{9}(9 - x^2)$

$y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ ou $y = -\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$

Donc (C) est la partie de (E) située au-dessus de l'axe des abscisses.
(E) =(C) $\cup$ (C') où (C') est le symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

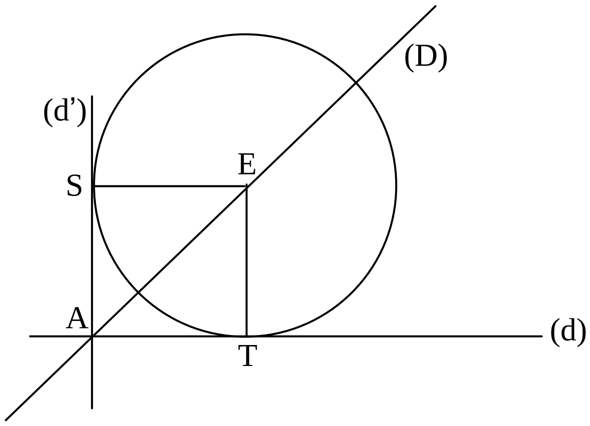


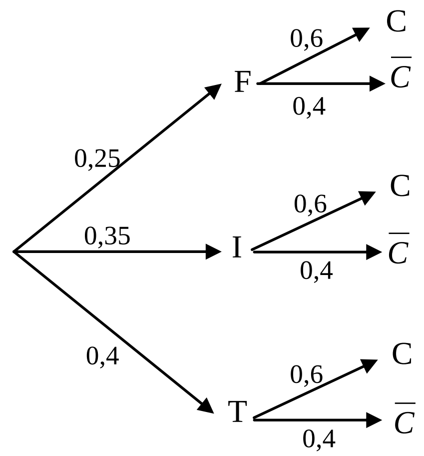
</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>

$A = 2\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 12\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = 6\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$

$= 6\left[\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = 6\pi\ u^2$.

</td><td></td></tr>
</table>

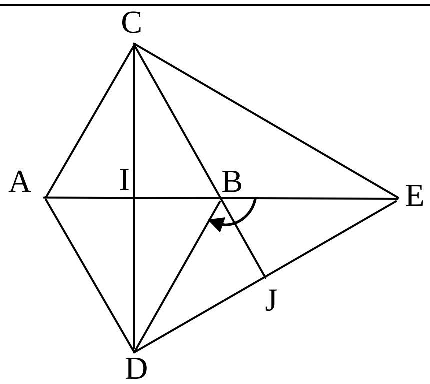
II	1	A est le point de (d) correspondant à t = 0 ; A est le point de (d') correspondant à m = 1. $\vec{V}_d$ (2 ; – 2 ; 1) et $\vec{V}_{d'}$ (1 ;2 ;2) ; $\vec{V}_d \cdot \vec{V}_{d'} = 0$, donc (d) $\perp$ (d') .	
	2	M(x,y,z) est un point de (P) ssi $\vec{AM}.(\vec{V}_d \wedge \vec{V}_{d'}) = 0$; D'où (P) : 2x + y – 2z + 3 = 0.	
	3-a	A est un point de (D) correspondant à $\lambda = \frac{2}{3}$. ► $\cos(\vec{V}_d\ ;\ \vec{V}_D) = \frac{\vec{V}_d \cdot \vec{V}_D}{\lVert \vec{V}_d \rVert \times \lVert \vec{V}_D \rVert} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc l'un des angles formés par (d) et (D) est égal à 45°. ► Ou : $\vec{V}_D$ (3 ;0 ;3) ; $\vec{V}_D = \vec{V}_d + \vec{V}_{d'}$ avec $\lVert \vec{V}_d \rVert = \lVert \vec{V}_{d'} \rVert = 3$. ► Ou : Soit E(–1 ; –1 ; 0) un point de (D) ; d(E ;(d)) = d(E,(d')) = 2 .	
	3-b	 $\hat{A} = \hat{T} = \hat{S} = 90^\circ$ et ES = ET ,donc ATES est un carré, par suite AT = $\frac{AE}{\sqrt{2}} = 2$. Ou AT = ES = 2 .	
	3-c	Soit L le milieu de [AE] ; L(0 ; – 1 ; 1) (Q) : $\vec{LM} \cdot \vec{AE} = 0$ avec $\vec{AE}$ (– 2 ; 0 ;– 2) (Q) : x + z – 1 = 0 T et S sont deux points de (Q) et de (P) , par suite (TS) est la droite d'intersection de (Q) et (P). (TS) : $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ (TS) : x = – α + 1 , y = 4α – 5 , z = α .	



III	1-a	$P(C\cap F) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$; $P(C\cap I) = 0{,}35 \times 0{,}6 = 0{,}21$ $P(C\cap T) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$; $P(C) = P(C\cap F)+P(C\cap I)+P(C\cap T) = 0{,}6$. ► P(C) = 0,6 car 60% des clients choisissent la pension complète.	
	1-b	$P(I/C) = \dfrac{P(I\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}21}{0{,}6} = 0{,}35.$	
	2-a	(tableau ci-dessous)	

x_i	700 000	800 000	1100 000	1250 000	1300 000	1500 000
p_i	0,16	0,24	0,14	0,21	0,1	0,15

III	2-b	E(X) = 1 075 500 . 1 075 500LL est la somme moyenne payée par un voyageur à l'agence.	
	2-c	Si l'agence sert 200 voyageurs on estime qu'elle reçoit $200 \times E(X) = 215\,100\,000$ LL .	

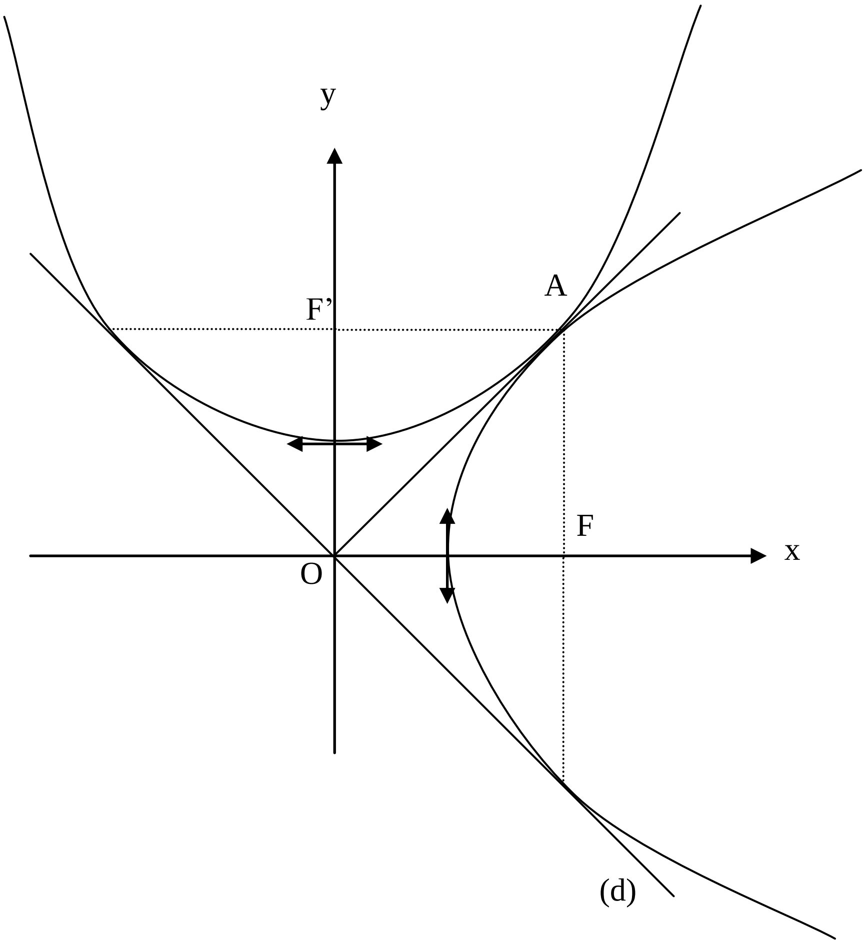


IV	1	(CI) : bissectrice de $A\hat{C}B$ donc $I\hat{C}B = 30^o$. $I\hat{C}E = 60^o$ par suite (CB) est une bissectrice de $I\hat{C}E$. De même (DB) : bissectrice de $I\hat{D}E$, donc B est le centre du triangle équilatéral DEC ; BE = 2 BI = AB et par suite AE = 2AB.	
	2	S(A) = B et S(E) = D donc $k = \dfrac{BD}{AE} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{1}{2}$ et $\theta = (\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD})\,(2\pi) = (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD})\,(2\pi) = -\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.	

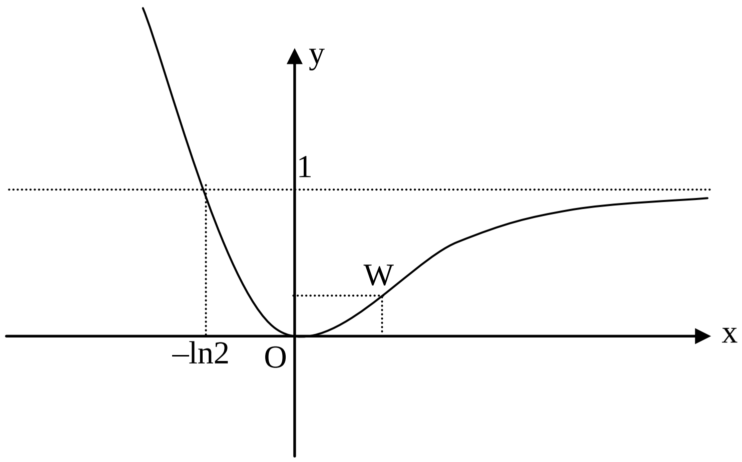
IV	3	Le triangle ACE est rectangle en C , le cercle (T) a pour diamètre [AE], d'où (T') est le cercle de diamètre [BD] = S([AE]) . J : milieu de [ED] et BDE est isocèle donc $B\hat{J}D = 90^o$ et $J \in (T')$.	

		AEC est un triangle demi-équilatéral direct et BDJ est un triangle demi équilatéral direct donc S(C) = J.	
	4-a	$z_B = 2$; $z_C = 1 + i\sqrt{3}$; $z_D = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_E = 4$.	
	4-b	$z' = az + b = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + b = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z + b$. S(A) = B donc b = 2 d'où $z' = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})z + 2$. ►Ou : S(A) = B et S(E) = D donnent 2= 0 + b et $1 - i\sqrt{3} = a(4) + b$ b = 2 et $a = -\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})$. $z_W = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{7}(5-i\sqrt{3})$.	
	5-a	S'oS est une similitude de centre W et de rapport $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3} = -\pi$. S'oS est une symétrie centrale de centre W.	
V	5-b	$z_{A'} = 2z_W = \frac{4}{7}(5-i\sqrt{3})$.	

		(P) : $y^2 = 2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ et (P') :$x^2 = 2y - 1$.	
	1	(P) de sommet $S(\frac{1}{2},0)$, de foyer F(1 ;0) et de directrice (y'y). (P') de sommet $S'(0, \frac{1}{2})$, de foyer F'(0 ;1) et de directrice (x'x) .	
V	2	Les coordonnées de A vérifient les équations de (P) et de (P') , donc A est un point commun à ces paraboles. ►(OA) : y = x (OA) $\cap$(P) : $x^2 = 2x - 1$; $(x - 1)^2 = 0$, x' = x'' = 1(racine double) (OA) est tangente à (P) en A. (OA) $\cap$(P') : $y^2 = 2y - 1$; $(y - 1)^2 = 0$, y' = y'' = 1(racine double) (OA) est tangente à (P') en A. ►Ou : 2yy' = 2 , $y' = \frac{1}{y}$ et $y_A' = 1$; l'équation de la tangente en A à (P) est y – 1 = 1(x – 1) ; y = x c'est (OA) . De même pour (P'). ►Soit en remarquant que (OA) est la bissectrice de $F\hat{A}F'$.	
	3	(d) : y = –x . (d)$\cap$(P) : $x^2 = 2x - 1$; racine double $x' = x'' = x_A$. (d)$\cap$(P') : $y^2 = 2y - 1$; racine double $y' = y'' = y_A$. ►Ou (d) est la symétrique de (OA) par rapport à l'axe focal (axe de symétrie) de (P) donc (d) est une tangente à (P) .De même (d) est symétrique de (OA) par rapport à l'axe focal (y'y) de (P').	

V	4		
	5	S est l'aire demandée. L'aire limitée par (P) , (x'x) et la droite x = 1 est égale à l'aire limitée par (P') , (y'y) et la droite y = 1 . S = (l'aire du carré OFAF') – 2×3 = 9 – 6 = 3 cm^2 .	

VI	A-1	$y'' + 3y' + 2y = 2$; $z = y - 1$. (E_1) : $z'' + 3z' + 2z = 0$. Equation caractéristique de (E_1) : $r^2 + 3r + 2 = 0$; $r = -1$ ou $r = -2$ Donc $z = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.	
	A-2	$y = z + 1 = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 1$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ donnent $C_1 + C_2 = -1$ et $-C_1 - 2C_2 = 0$; $C_1 = -2$ et $C_2 = 1$. Donc $y = -2e^{-x} + e^{-2x} + 1$.	
	B-1	$f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 1 = 1$, la droite (d) d'équation y = 1 est une asymptote à (C) .	

<table>
<tr><td rowspan="8">VI</td><td>B-2</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(e^{-x}-2+e^{x})=+\infty$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}(e^{-x}-2+e^{x})}{x}=-\infty(+\infty)=-\infty$
y’y est une direction asymptotique.</td><td></td></tr>
<tr><td>B-3</td><td>f ’(x) = $-2e^{-2x}+2e^{-x}$
$=2e^{-x}(1-e^{-x})$
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>B-4</td><td>f ’’(x) = $4e^{-2x}-2e^{-x}=2e^{-x}(2e^{-x}-1)$
f’’(x) s’annule en x = ln2 en changeant de signe ; en plus f(ln2) = $\frac{1}{4}$.
Donc le point W(ln2 ; $\frac{1}{4}$) est un point d’inflexion de (C).</td><td></td></tr>
<tr><td>B-5</td><td>(C) coupe (d) ; $e^{-2x}-2e^{-x}+1=1$; $e^{-x}(e^{-x}-2)=0$; $e^{-x}=2$; $x=-\ln2$
(C) coupe (d) en (– ln2 ; 1) .</td><td></td></tr>
<tr><td>B-6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B-7</td><td>$S=\int_{-\ln2}^{0}(1-f(x))dx=\int_{-\ln2}^{0}(-e^{-2x}+2e^{-x})dx=\left[\frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}\right]_{-\ln2}^{0}=\frac{1}{2}u^2$.</td><td></td></tr>
<tr><td>B-8
a</td><td>g(x) = ln(f(x))
g est définie pour f(x) > 0 ce qui correspond à $D_g=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
g(x) = ln(f(x)) et ln est strictement croissante donc g et f varient dans le même sens.
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & -\infty \,\Vert\, -\infty & \nearrow & 0 \end{array}$$
► Ou $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ donc g’(x) a même signe que f’(x) sur D_g.
En plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.</td><td></td></tr>
</table>

VI	B-8 b	$g(x)-(-2x)=\ln(e^{-2x}-2e^{-x}+1)+\ln(e^{2x})=\ln(1-2e^{x}+e^{2x})$ $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)+2x]=\ln 1=0$; (D) est une asymptote à (G) en $-\infty$.	
	B-8 c	g(x) = 0 équivaut à ln(f(x)) = 0 ; f(x) = 1 ; x = – ln2. g(x) = – 2x équivaut à $\ln(1-2e^{x}+e^{2x})=0$; $-2e^{x}+e^{2x}=0$; $e^{x}=2$; x = ln2 .	
	B-8 d