وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	دورة سنة 2012 الأستثنائية
عدد المسائل:ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

Nº	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	θ est un réel donné. Si $z=-2e^{-i\theta}$, alors un argument de z est :	θ	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$-\theta$
2	L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ln x)^2-2\ln x<0$ est :	$[1\,;\,e^2]$	$]e^2\,;\,+\infty[$	$]1\,;\,e^2[$	$]0\,;\,2[$
3	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$	0	e	$+\infty$	1
4	Si z est un complexe différent de i, alors $\left\|\dfrac{i\bar{z}-1}{z-i}\right\|=$	$\|z\|$	1	$\dfrac{1}{2}$	2

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le plan (P) d'équation

$x-y-z+1=0$ et les points A(1 ; 2 ; 0) et B(–1 ; – 2 ; 2).

1) Vérifier que A et B appartiennent à (P) et déterminer une équation du plan (Q) passant par A et B et perpendiculaire à (P).

2) Soit (d) la médiatrice du segment [AB] dans le plan (P).

Montrer qu'un système d'équations paramétriques de (d) est : $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ où t est un paramètre réel.

3) On considère dans le plan (P) le cercle (C) de diamètre [AB]. (C) coupe (d) en deux points E et F.

a- Calculer les coordonnées des points E et F. (E est le point d'abscisse positive).

b- Soit (T) la tangente en E à (C) et M un point quelconque de (T).

Démontrer que, lorsque M varie sur (T), la distance de M à (Q) reste constante.

III- (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$, on donne la courbe (C_m) d'équation :

$mx^2 - 2y^2 + 2mx + 4y = 0$ où m est un réel différent de –2, 0 et 2.

A- Dans cette partie, on prend m = 1.

1) Démontrer que (C_1) est une hyperbole dont on précisera le centre I et l'axe focal.

2) Calculer les coordonnées des sommets de (C_1) et déterminer ses asymptotes.

3) Tracer (C_1).

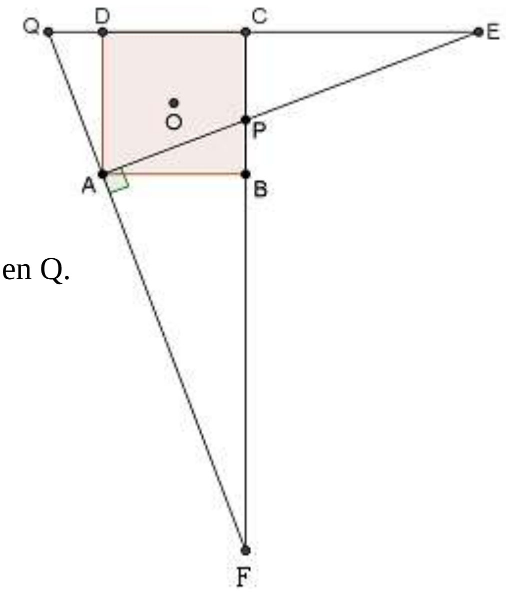
4) La tangente et la normale à (C_1) en O coupent la droite d'équation x = – 1 en deux points T et N respectivement. Démontrer que $\overrightarrow{IT}\cdot\overrightarrow{IN} = \frac{3}{2}$.

B - Dans cette partie, on suppose que m < 0.

1) Vérifier que $\dfrac{(x+1)^2}{\frac{m-2}{m}} + \dfrac{(y-1)^2}{\frac{2-m}{2}} = 1$ est une équation de (C_m). Déduire que (C_m) est une ellipse.

2) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'axe focal de (C_m) est parallèle à l'axe des abscisses.

IV- (3 points)



Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1

et de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

P est un point du segment [BC] tel que PB = t où 0 < t < 1.

La droite (AP) coupe la droite (CD) en E.

La perpendiculaire en A à (AP) coupe la droite (BC) en F et (CD) en Q.

On désigne par M le milieu du segment [FE] et N celui de [PQ].

1) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a- Déterminer, en justifiant l'image de (BC) par r.

b- Montrer que r(P) = Q et déterminer r(F).

c- Préciser la nature de chacun des triangles APQ et AFE.

2) Soit s la similitude de centre A, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a- Montrer que s(P) = N et déterminer s(F) et s(B).

b- En déduire que les points M, B, N et D sont alignés.

3) a- Prouver que $BF=\frac{1}{t}$.

b- Déterminer t pour que l'aire du triangle AMN soit égale à $\frac{5}{8}$.

4) Le plan complexe est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

a- Donner l'écriture complexe de s.

b- Dans le cas où $t=\frac{1}{3}$, déterminer les affixes z_M et z_N des points M et N et déduire que

$\frac{z_M-1}{z_N-1}$ est un réel.

V- (3 points)

Une urne contient **5** boules rouges, **4** boules noires et **3** boules vertes.

On tire au hasard trois boules de l'urne et on considère les événements suivants:

E : « Les trois boules tirées sont de même couleur »

F : « Les trois boules tirées sont de trois couleurs différentes »

G : « Parmi les trois boules tirées, il y a exactement deux boules de même couleur ».

A- Dans cette partie, le tirage des 3 boules se fait **simultanément.**

1) Calculer les probabilités p(E), p(F) et p(G).

2) Sachant que parmi les trois boules tirées il y a exactement deux boules de même couleur, calculer la probabilité que la troisième boule soit rouge.

B- Dans cette partie le tirage des trois boules se fait successivement et **avec remise**.

1) Calculer p(E), p(F) et déduire p(G).

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges parmi les trois boules tirées.

a- Montrer que $p(X=2)=\frac{175}{576}$.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

VI- (7 points)

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = 2x + \dfrac{1-\ln x}{x}$ et $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$ et on désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

A- 1) Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2) Calculer g(1) et déduire, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

B-1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Prouver que droite (d) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (C) et étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

2) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (d) et (C) dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

5) a- Montrer que f admet sur $[1;+\infty[$ une fonction réciproque h et préciser son domaine de définition.

b- Tracer la courbe (Γ) représentative de h dans le même repère que (C).

c- Déterminer l'abscisse du point de (Γ) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.

6) a- Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} \big(f(x) - 2x\big)dx$.

Calculer U_n et prouver que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b- Soit A l'aire du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Vérifier que A, en unités d'aire, est égale à $U_o - U_1$.

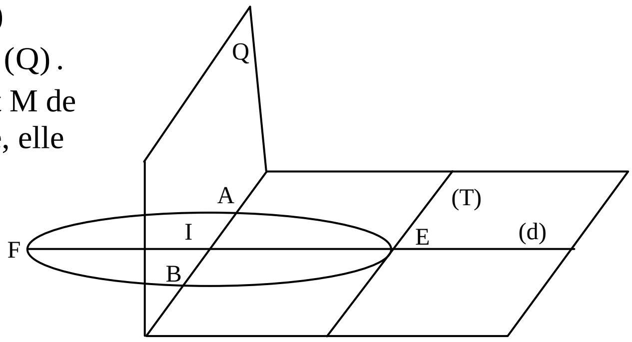
C- On définit sur $]0\,;+\infty[$ une fonction p par : $p(x) = x^2(1 + \ln x) - 3x + 2$.

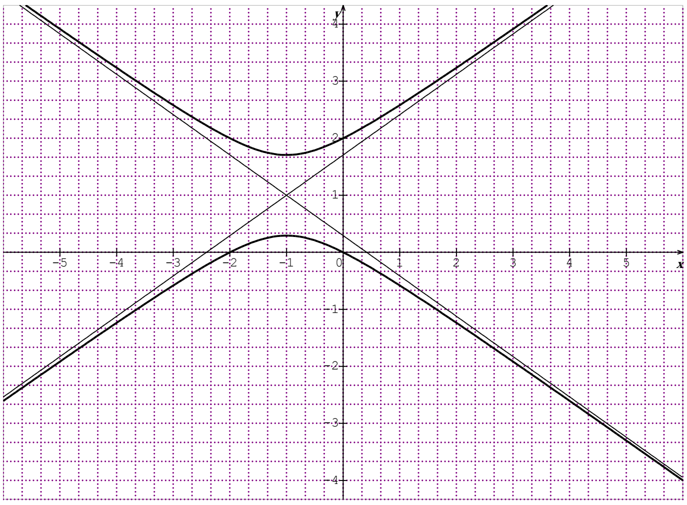
1) Montrer que p est prolongeable par continuité au point $x = 0$.

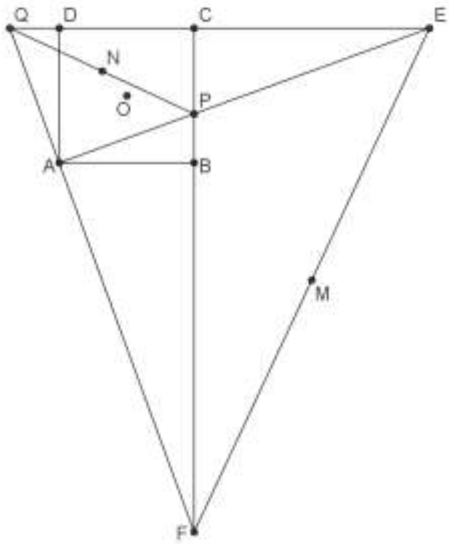
2) Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, on a $\dfrac{p(x)}{x} = f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 3$ et prouver que $p(x) \geq 0$.

3) Préciser la valeur de x pour laquelle $p(x) = 0$.

I	Corrigé		Note
1	$z = -2e^{-i\theta} = 2e^{i\pi}e^{-i\theta} = 2e^{i(\pi-\theta)}$.	b	**1**
2	$(\ln x)(\ln x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < \ln x < 2 \Leftrightarrow 1 < x < e^2$.	c	1
3	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = 0$.	a	1
4	$\frac{\lvert i\bar{z}-1\rvert}{\lvert z-i\rvert} = \frac{\lvert i\rvert\lvert\bar{z}+i\rvert}{\lvert\overline{z-i}\rvert} = \frac{\lvert\overline{z-i}\rvert}{\lvert z-i\rvert} = 1$.	b	1

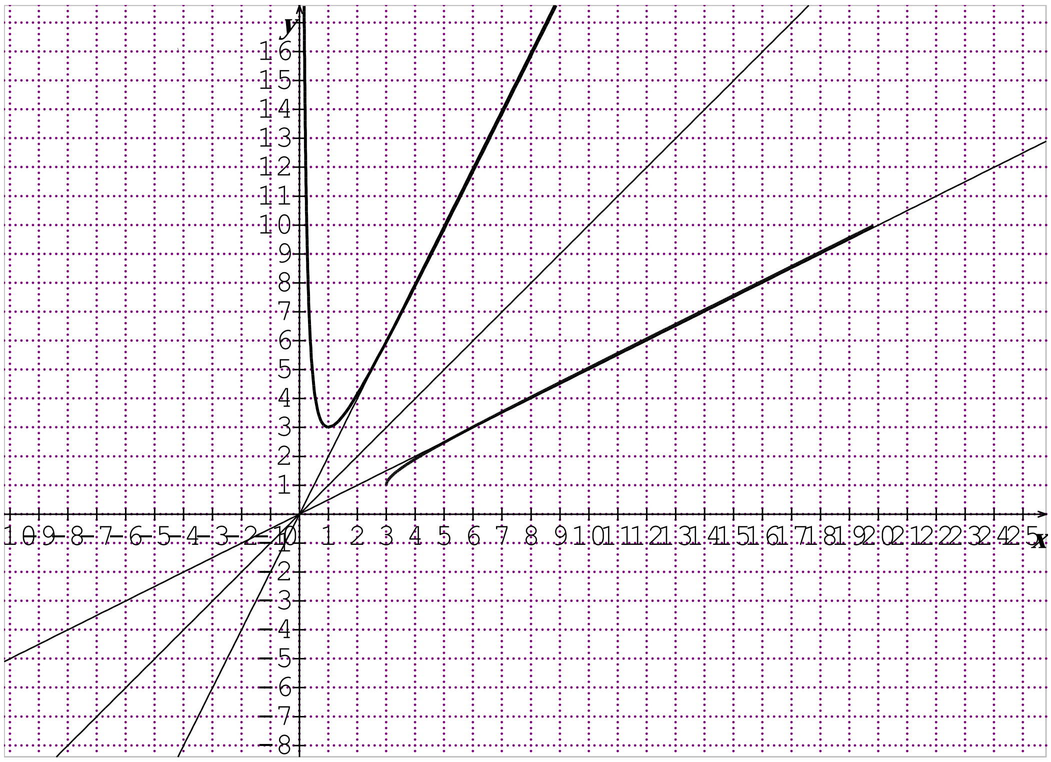
II	Corrigé	Note
1	$1-2-0+1=0$ donc $A \in (P)$ et $-1+2-2+1=0$ donc $B \in (P)$. (Q) perpendiculaire à (P) donc $\overrightarrow{n_p}$ est parallèle à (Q). donc si M(x ; y ; z) est un point de (Q), alors $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{n_P}\wedge\overrightarrow{AB}\right)=0$ d'où: $x+z-1=0$.	1
2	(d) est l'intersection de (P) et du plan médiateur (R) de [AB]. Si I est le milieu de [AB] et $M(x;y;z) \in (R)$, alors $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow x(-2)+y(-4)+(z-1).2=0$. Une équation de (R) est $x+2y-z+1=0$. Posons z = t alors $\begin{cases} x-y=t-1 \\ x+2y=t-1 \end{cases}$ donc $y=0$ et $x=t-1$. D'ou $(d):\begin{cases} x=t-1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ Ou : on vérifie que le milieu de [AB] appartient à (d), que (d) est incluse dans (P) et que (d) est perpendiculaire à (AB).	1
3a	E et $F \in (d)$ d'où $x=t-1$; $y=0$ et $z=t$; E et $F \in (C)$ d'où $IE = IF = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$ or $I(0;0;1)$, d'où $(t-1)^2+0+(t-1)^2=6$ par suite $t-1=\sqrt{3}$ ou $t-1=-\sqrt{3}$. Donc $E\left(\sqrt{3};\,0\,;1+\sqrt{3}\right)$ et $F\left(-\sqrt{3};\,0\,;1-\sqrt{3}\right)$.	1
3b	$(T)\perp(d)$ donc (T) est parallèle à (AB) d'où (T) est parallèle à (Q) car $(AB)\subset(Q)$. (T) parallèle à (Q) donc pour tout point M de (T) la distance de M à (Q) est la même, elle est égale au rayon de (C) donc $\sqrt{6}$. 	1

III	Corrigé	Note
A1	Pour m = 1 on aura $x^2-2y^2+2x+4y=0$ Soit $(x+1)^2-2(y-1)^2=-1$ $\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{2}}-(x+1)^2=1$ donc (C_1) est une hyperbole de centre I(–1 ; 1) et d'axe focal la droite passant par I et parallèle à l'axe des ordonnées d'équation x = –1.	1
A2	Pour x = –1, $(y-1)^2=\dfrac{1}{2}\rightarrow y=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ .donc les sommets sont $A(-1\,;1+\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ et $A'(-1\,;1-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.	1
A3		0.5
A4	Dérivons : 2x – 4yy'+2 + 4y' = 0. D'où $y'=\dfrac{x+1}{2(2y-1)}$. La pente de la tangente en O est $-\dfrac{1}{2}$ et celle de la normale est 2. La tangente a pour équation $y=-\dfrac{1}{2}x$ et la normale y = 2x. $T(-1\,;\dfrac{1}{2})$ et N(–1 ;–2). $\overrightarrow{IT}.\overrightarrow{IN}=\dfrac{3}{2}$.	1.5
B1	$m(x+1)^2-2(y-1)^2=m-2$ $\dfrac{m(x+1)^2}{m-2}-\dfrac{2(y-1)^2}{m-2}=1\leftrightarrow\dfrac{(x+1)^2}{\frac{m-2}{m}}+\dfrac{(y-1)^2}{\frac{2-m}{2}}=1$ Pour m < 0, $\dfrac{m-2}{m}>0$ et $\dfrac{2-m}{2}>0$ donc (C_m) est une ellipse de centre I.	1
B2	L'axe focal sera $(I;\vec{i})$ lorsque $a^2>b^2$ c.à.d $\dfrac{m-2}{m}-\dfrac{2-m}{2}>0\leftrightarrow(m-2)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2}\right)>0\leftrightarrow\dfrac{m+2}{2m}<0\leftrightarrow m+2>0$ ce qui donne –2 < m < 0.	1

IV	Corrigé	Note
1a	$r(B) = D$ donc l'image de (BC) par r est la droite passant par D et perpendiculaire à (BC) donc r (BC) = (DC).  	0.5
1b	$P \in (BC)$ donc $r(P) \in (DC)$ et $r(P)$ appartient à la droite menée par A et perpendiculaire à (AP) qui est (AQ) donc r (P) = Q. de même r (F) est le point d'intersection de (DC) avec (AP) ; r(F) = E.	0.5
1c	$AP = AQ$ et $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc APQ est rectangle isocèle. $AF = AE$ et $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc AFE est rectangle isocèle.	0.5
2a	$s(P) = N$ car $\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{AN}{AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car le triangle ANP est rectangle isocèle. $s(F) = M$ car $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{AM}{AF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car le triangle AMF est rectangle isocèle. s(B) = O car ABO est rectangle isocèle en O.	1
2b	$s(P) = N$; $s(F) = M$; $s(B) = O$ et $s(C) = D$ Or P, F, B et C sont alignés et l'image par s d'une droite est une droite donc N, M, O et D sont alignés et B appartient à (OD).	1
3a	Dans le triangle rectangle APF on a $AB^2 = BP \times BF$. Donc 1 = t × BF ; $BF = \frac{1}{t}$.	0.5
3b	$s(AFP) = AMN$ donc $\text{Aire}(AMN) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \text{Aire } AFP$ Or $\text{Aire}(AFP) = \frac{AB \times PF}{2} = \frac{1 \times \left(t + \frac{1}{t}\right)}{2} = \frac{t^2+1}{2t} = \frac{5}{8}$; $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t = \frac{1}{2}$ (car $0 < t < 1$)	0.5
4a	$z' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} z$ car A est l'origine du repère. $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z = \frac{1+i}{2} z$.	0.5
4b	On a $z_P = 1 + \frac{i}{3}$ et $z_F = 1 - 3i$. $s(P) = N \Leftrightarrow z_N = \frac{(1+i)}{2}\left(1 + \frac{i}{3}\right) = \frac{1+2i}{3}$; $s(F) = M \Leftrightarrow z_M = \left(\frac{1+i}{2}\right)(1-3i) = 2 - i$. $\frac{z_M - 1}{z_N - 1} = \frac{\frac{1+2i}{3} - 1}{2 - i - 1} = \frac{-2+2i}{3(1-i)} = -\frac{2}{3}$. Donc c'est un réel.	1

V	Corrigé	Note
A1	$p(E) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} + \frac{C_4^3}{C_{12}^3} + \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{3}{44}$. $p(F) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{3}{11}$. $p(G) = 1 - [\ p(A) + p(B)\ ] = \frac{29}{44}$. **ou** $p(G) = \frac{C_5^1 \times C_4^2 + C_5^1 \times C_3^2 + C_4^1 \times C_5^2 + C_4^1 \times C_3^2 + C_3^1 \times C_5^2 + C_3^1 \times C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{29}{44}$.	1 .5
A2	$p = \frac{p(2 \text{ noires et } 1 \text{ rouge}) + p(2 \text{ vertes et } 1 \text{ rouge})}{p(G)} = \frac{C_5^1 \times C_4^2 + C_5^1 \times C_3^2}{C_{12}^3} = \frac{9}{29}$.	1
B1	$p(E) = (\frac{5}{12})^3 + (\frac{4}{12})^3 + (\frac{3}{12})^3 = \frac{1}{8}$; $p(F) = (\frac{5}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{3}{12}) \times 3! = \frac{5}{24}$; $p(G) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24}\right) = \frac{2}{3}$.	1.5
B2a	$p(X = 2) = (\frac{5}{12})^2 \times \frac{7}{12} \times 3 = \frac{157}{576}$.	0.5
B2b	Les valeurs possibles de X sont : 0, 1, 2, 3. $p(X = 0) = (\frac{7}{12})^3$; $p(X = 1) = \frac{5}{12} \times (\frac{7}{12})^2 \times 3 = \frac{245}{576}$; $p(X = 3) = (\frac{5}{12})^3$.	1.5

VI	Corrigé	Note
A1	g'(x) = 2x + (1/x) > 0 ; g est strictement croissante.	0.5
A2	g(1) = 0 donc g(x) < 0 pour 0< x < 1 et g(x) > 0 pour x > 1.	0.5
B1a	$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 + \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est asymptote à (C).	0.5
B1b	$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = 0$; La droite d'équation y = 2x est asymptote à (C). $f(x) - 2x = \frac{1 - \ln x}{x}$. Pour 0 < x <e, f(x) –2x > 0 donc (C) est au- dessus de (d). Pour x = e, f(x) –2x = 0 donc (C) et (d) se coupent au point I(e ; 2e). Pour x > e, f(x) –2x < 0 donc (C) est au -dessous de (d).	1
B2	$f'(x) = 2 + \frac{-1 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.	0.5

B3	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \| +\infty & \searrow & 3 & \nearrow & +\infty \end{array}$	0.5
B4		1.5
B5a	Sur $[1\ ;+\infty[$ f est continue et strictement croissante ; donc elle admet une fonction réciproque h ; $D_h = [3\ ;+\infty[$.	0.5
B5b	(Γ) est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x. Voir figure.	1.5
B5c	On trouve le point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation y = 2x. $f'(x) = 2$; $g(x) = 2x^2$; $\ln x = 2$; $x = e^2$. Donc le point demandé est $(2e^2 - e^{-2}\ ;\ e^2)$.	1
B6a	$U_n = \displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1-\ln x}{x}\,dx = \left[-\frac{(1-\ln x)^2}{2}\right]_{e^n}^{e^{n+1}} = \frac{1}{2}[(1-n)^2 - n^2] = -n + \frac{1}{2}$. $U_{n+1} - U_n = -1$, (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$.	2
B6b	$A = \displaystyle\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}\,dx - \int_e^{e^2} \frac{1-\ln x}{x}\,dx = U_0 - U_1$.	1.5
C1	$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} p(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x(x + x\ln x - 3) + 2 = 2$. p est prolongeable par continuité au point 0.	1
C2	$\dfrac{p(x)}{x} = x(1+\ln x) - 3 + \dfrac{2}{x} = f(\dfrac{1}{x}) - 3 \geq 0$, le minimum de f est 3 donc $p(x) \geq 0$.	1
C3	$p(x) = 0$ pour $f(\dfrac{1}{x}) = 3$; $\dfrac{1}{x} = 1$; $x = 1$.	0.5