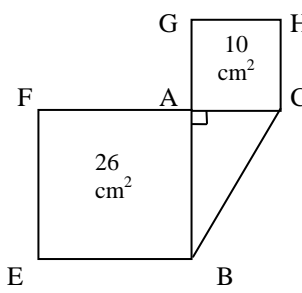


وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات		امتحانات الشهادة المتوسطة	دورة سنة ٢٠٠٤ العادية
عدد المسائل : ستة	مسابقة في الرياضيات المدة : ساعتان	الاسم : الرقم :	

**ملاحظة :** يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو لاختزان المعلومات أو لرسم البيانات.  
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

### I- (2 points)

Dans le tableau ci-dessous, une seule réponse à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de la question et la réponse correspondante. Justifier ce choix.

N°	Questions	Réponses		
		a	b	c
1)	$\frac{8}{15} + \frac{7}{15} \times \frac{2}{3}$ est égal à .....	$\frac{2}{3}$	$\frac{38}{45}$	$\frac{22}{15}$
2)	Si chaque année, les prix augmentent de 10%, au bout de deux années les prix auront augmenté de .....	100%	21%	20%
3)	 <p>Dans cette figure, l'aire du carré AFEB est <math>26\text{cm}^2</math> et l'aire du carré ACHG est <math>10\text{cm}^2</math>. Alors BC = .....</p>	$(\sqrt{26} + \sqrt{10})\text{cm}$	$\sqrt{\sqrt{26} + \sqrt{10}}\text{cm}$	6cm

### II- (2 points)

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

On donne trois points A, B et C tels que :  $AB = \sqrt{108}$ ,  $BC = \sqrt{48}$  et  $AC = 10\sqrt{3}$ .

- 1) Calculer  $AB + BC$  en donnant la réponse sous la forme  $a\sqrt{3}$ .
- 2) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.

### III- (2½ points)

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

x et y sont deux nombres positifs. ABC est un triangle rectangle en A tel que :

$$AB = 2x + y, \quad AC = x + y \quad \text{et} \quad BC = 3x + y.$$

Le périmètre du triangle ABC est 24 et  $\tan \angle C = \frac{3}{4}$ .

- 1) Justifier que les données précédentes se traduisent par le système 
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x + 3y = 24 \end{cases}$$
.
- 2) a- Calculer x et y en écrivant les étapes suivies.  
b- Déduire les longueurs des côtés du triangle ABC.

**IV- (3 points)**

On considère les expressions :

$$A(x) = (x + 3)(4x + 7) \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 - 4 + (x - 2)(3x + 5).$$

- 1) Résoudre l'équation  $A(x) = 0$ .
- 2) Démontrer que  $B(x) = (x - 2)(4x + 7)$ .
- 3) Soit l'expression  $F(x) = \frac{x^2 - 4 + (x - 2)(3x + 5)}{(x + 3)(4x + 7)}$ .
  - a- Pour quelles valeurs de  $x$ ,  $F(x)$  est-elle définie ?
  - b- Simplifier  $F(x)$  puis résoudre l'équation  $F(x) = 2$ .
  - c- L'équation  $F(x) = -3$  admet-elle une solution ? Justifier.

**V- (6 points)**

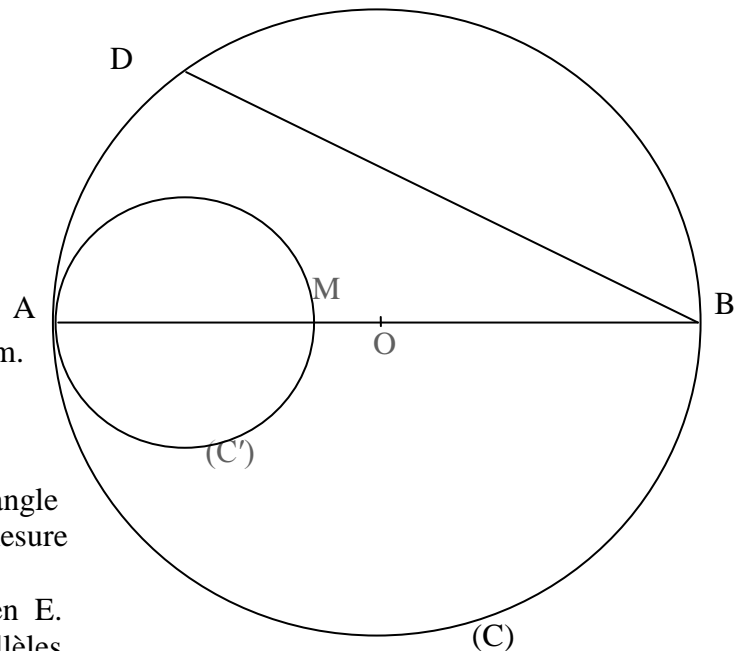
Dans un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ , on donne les points  $A(4 ; 2)$ ,  $B(-2 ; -2)$ , et la droite (d) d'équation  $y = -x + 4$ .

- 1) Tracer (d) et placer A et B.
- 2) Calculer les coordonnées du point G milieu du segment [OA].
- 3) a- Déterminer l'équation de la droite (OA).  
b- On appelle ( $\Delta$ ) la médiatrice du segment [OA]. Montrer que ( $\Delta$ ) a pour équation  $y = -2x + 5$ .
- 4) Soit M le point d'intersection des droites ( $\Delta$ ) et (d).
  - a- Justifier qu'on a  $MO = MA$ .
  - b- Calculer les coordonnées de M.
  - c- Démontrer que le triangle MOA est rectangle et isocèle.
- 5) On appelle N le translaté de M par la translation de vecteur  $\vec{OB}$ .  
Démontrer que  $NB = MA$ .

**VI- (4½ points)**

Dans la figure ci-contre :

- $AB = 8$  cm.
- (C) est le cercle de diamètre [AB] et de centre O.
- M est le point du segment [AO] tel que  $AM = 3$  cm.
- (C') est le cercle de diamètre [AM].
- D est un point de (C) tel que  $BD = 7$  cm.
- (C) et (C') sont tangents en A.



- 1) Reproduire la figure.
- 2) Justifier que  $\triangle ADB$  est un triangle rectangle et calculer, arrondie au degré près, la mesure de l'angle ABD.
- 3) La droite (AD) recoupe le cercle (C') en E. Démontrer que (BD) et (ME) sont parallèles, puis calculer EM.
- 4) La tangente commune en A à (C) et (C') coupe la droite (BD) en N. Choisir deux triangles et démontrer qu'ils sont semblables, puis déduire que  $AN^2 = ND \times NB$ .
- 5) Soit F le point tel que  $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{DB}$ .  
Démontrer que le quadrilatère DAFB est un rectangle. En déduire que F est un point du cercle (C).

Question		Barème provisoire	Note
I	N° 1	La réponse correcte est b. Justification : $\frac{8}{15} + \frac{7}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15} + \frac{14}{45} = \frac{24 + 14}{45} = \frac{38}{45}$	
	N° 2	La réponse correcte est b. Justification : si x est le prix initial, au bout d'une année le prix est 1,1x x ; au bout de deux années le prix est 1,1 x (1,1 x) c'est-à-dire 1,21 x. Les prix auront augmenté de 21%.	
	N° 3	La réponse correcte est c. Justification : ABC est un triangle rectangle en A. Alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Or $AB^2 = 26 \text{ cm}^2$ et $AC^2 = 10 \text{ cm}^2$ . D'où $BC^2 = 26 + 10 = 36 \text{ cm}^2$ et $BC = 6 \text{ cm}$ .	
II	1) 2)	$AB + BC = \sqrt{48} + \sqrt{108} = 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ A, B et C sont alignés car $AB + BC = AC$	
III	1)	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>AB + AC + BC = (2x + y) + (x + y) + (3x + y) = 6x + 3y</math>. D'où <math>6x + 3y = 24</math>. C'est la deuxième équation du système.</li> <li><math>\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{x + y}{2x + y}</math> (ABC est rectangle en A)</li> <li>D'où <math>\frac{x + y}{2x + y} = \frac{3}{4}</math>, alors <math>4(x + y) = 3(2x + y)</math>. <math>4x + 4y = 6x + 3y</math>. <math>2x - y = 0</math></li> </ul> C'est la deuxième équation du système.	
	2)	a) Le système donné s'écrit $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ D'où $4x = 8$ et $x = 2$ $x = 2$ et $2x - y = 0$ , alors $y = 4$ . b) $AB = 8$ , $AC = 6$ et $BC = 10$ .	
IV	1)	$A(x) = 0$ , alors $(x + 3)(4x + 7) = 0$ $(x + 3) = 0$ ou $4x + 7 = 0$ $x = -3$ ou $x = -\frac{7}{4}$ .	
	2)	$B(x) = (x - 2)(x + 2) + (x - 2)(3x + 5) = (x - 2)(x + 2 + 3x + 5)$ $B(x) = (x - 2)(4x + 7)$ .	
	3-	a) <ul style="list-style-type: none"> <li><math>F(x) = \frac{x^2 - 2 + (x - 2)(3x + 5)}{(x + 3)(4x + 7)}</math></li> <li>F(x) est définie si l'on a: <math>x + 3 \neq 0</math> et <math>4x + 7 \neq 0</math>, Alors : <math>x \neq -3</math> et <math>x \neq -\frac{7}{4}</math>.</li> </ul>	

	b)	$F(x) = \frac{(x - 2) + (4x + 7)}{(x + 3)(4x + 7)} = \frac{x - 2}{x + 3}$	
--	----	---	--

		<p>• <math>F(x) = 2</math> alors <math>\frac{x-2}{x+3} = 2</math></p> $x - 2 = 2(x + 3)$ $x = -8$							
	c)	<p><math>F(x) = -3</math> alors <math>\frac{x-2}{x+3} = -3</math></p> $x - 2 = -3(x + 3)$ $x = -\frac{7}{4}$ <p><math>F(x)</math> n'est pas définie en <math>-\frac{7}{4}</math>, alors l'équation <math>F(x) = -3</math> n'admet pas de solution.</p>							
<b>V</b>	1)	<p>Pour tracer (d):</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>4</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	x	0	4	y	4	0	
	x	0	4						
	y	4	0						
2)	$x_G = \frac{x_A + x_0}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $y_G = \frac{y_A + y_0}{2} = \frac{2}{2} = 1$ <p>G (2 ; 1)</p>								
3-	<p>a) L'équation de (OA) est de la forme <math>y = ax</math>. Les coordonnées de A vérifient cette équation : <math>2 = 4a</math>. D'où <math>a = \frac{1}{2}</math>. L'équation de (OA) est <math>y = \frac{1}{2}x</math></p>								
	b)	<p>(Δ) n'est pas parallèle à y'y, alors son équation est de la forme <math>y = ax + b</math></p> <p>(Δ) est perpendiculaire à (OA), alors <math>a \times \frac{1}{2} = -1</math>. D'où <math>a = -2</math>. L'équation de (Δ) s'écrit alors <math>y = -2x + b</math>. (Δ) passe par G, alors <math>y_G = -2x_G + b</math> <math>1 = -4 + b</math> <math>b = 5</math> L'équation de (Δ) est donc <math>y = -2x + 5</math>.</p>							

V	4)	<p>a) M est un point de la médiatrice de [OA], alors M est équidistant de O et A. D'où MO = MA.</p> <p>b) <math display="block">\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -x + 4 \end{cases}</math>  <math>-2x + 5 = -x + 4</math>, alors <math>x = 1</math> et <math>y = 3</math>. d'où M (1 ; 3).</p> <p>c) <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Soit a le coefficient directeur de (OM) et a' celui de (AM).</li> <li><math>a = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = 3</math>, <math>a' = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{2-3}{4-1} = -\frac{1}{3}</math>.</li> <li><math>a \times a' = -1</math>, alors (OM) est perpendiculaire à (AM).</li> <li>▪ D'après 4 - a) : MO = MA, alors OMA est isocèle en M.</li> <li>▪ D'où OMA est rectangle et isocèle.</li> </ul> </p>
	5)	<p>N est le translaté de M par la translation de vecteur <math>\overrightarrow{OB}</math>, alors <math>\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OB}</math> et OMNB est un parallélogramme.</p> <p>D'où NB = MO.</p> <p>Comme on a MO = MA, alors NB = MA.</p>
VI	1	
	2	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ [AB] est un diamètre de (C) et D est un point de ce cercle, alors ADB est rectangle en D.</li> <li>▪ <math>\cos \widehat{ABD} = \frac{BD}{AB} = \frac{7}{8}</math>. La calculatrice affiche <math>28^\circ, 95502437</math>.</li> </ul> <p style="text-align: center;">La mesure de l'angle <math>\widehat{ABD}</math> arrondie au degré près est <math>29^\circ</math>.</p>
	3	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ [AM] est un diamètre de (C')</li> <li>et E est un point de ce cercle, alors AME est rectangle en E.</li> <li>▪ (ME) <math>\perp</math> (AE) et (BD) <math>\perp</math> (AD), alors (ME) est parallèle à (BD).</li> <li>▪ (DA) et (DB) se coupent en D, et (ME) est parallèle à (BD), alors et d'après la propriété de Thalès :</li> </ul> $\frac{ME}{BD} = \frac{AM}{AB}$ <p>D'où <math>ME = \frac{BD \times AM}{AB} = \frac{3 \times 7}{8}</math>. <math>ME = \frac{21}{8}</math> cm.</p>

4)	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Choisissons les deux triangles ADN et BAN.</li> <li>▪ ADN est rectangle en D et BAN est rectangle en A,</li> </ul> <p style="text-align: center;"><math>\hat{N}</math> est un angle commun à ces deux triangles.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ces deux triangles sont alors semblables car deux angles de l'un sont respectivement égaux à deux angles de l'autre.</li> </ul> $\left. \begin{array}{l} \text{ADN} \\ \text{BAN} \end{array} \right\} \frac{AD}{BA} = \frac{AN}{BN} = \frac{DN}{AN}, \text{ alors } AN^2 = ND \times NB.$
5)	<p style="text-align: center;"><math>\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>DF = DA + DB</math>, alors DAFB est un parallélogramme.</li> </ul> <p style="text-align: center;">Dans ce parallélogramme, <math>\hat{ADB} = 90^\circ</math>. Alors DAFB est un rectangle.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dans le rectangle DAFB, <math>\hat{AFB} = 90^\circ</math>. [AB] est un diamètre du cercle (C), alors F est sur ce cercle.</li> </ul>