الدورة الإستثنائية للعام 2012	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	عدد المسائل:أربع

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة.

I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	Si $z=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z'=-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, alors un argument de $(z-z')$ est	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
2	Si z est l'affixe d'un point M tel que $\lvert z-2i\rvert=\lvert z+4i\rvert$, alors M décrit	un cercle	une droite parallèle à l'axe des ordonnées	une droite parallèle à l'axe des abscisses
3	Une des valeurs de z qui vérifient $\lvert z+1\rvert^2+\lvert z-1\rvert^2=2\lvert z+i\rvert^2$ est	3i	2 + 3i	2
4	La forme exponentielle de $\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\sqrt{3}+i}$ est	$\frac{1}{2}e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$	$2e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

II- (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A (2; –2; –1), B (l ; 0; –2), C (2; 1 ; –1) et le plan (P) d'équation :

$x-2y+z+1=0$.

1) Montrer qu'une équation du plan (Q) déterminé par A, B et C est $x-z-3=0$.

2) a- Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires et qu'ils se coupent suivant la droite (BC).

b- Calculer la distance de A à (BC).

3) Soit (d) la droite définie par: $\begin{cases}x=t-1\\y=t+1\\z=t+2\end{cases}$ où t est un paramètre réel.

a-Vérifier que (d) est incluse dans (P).

b-Soit M un point variable de (d).

Démontrer que l'aire du triangle MBC reste constante lorsque M se déplace sur (d).

III- (4 points)

On considère deux urnes **U** et **V**.

L'urne **U** contient huit boules: quatre boules portant le nombre 1, trois boules portant le nombre 2 et une boule portant le nombre 4.

L'urne **V** contient huit boules : trois boules portant le nombre 1 et cinq boules portant le nombre 2.

1) **On tire simultanément et au hasard deux boules de U.**

On considère les événements suivants :

- A : « les deux boules tirées portent le même nombre»
- B : « le produit des nombres portés par les deux boules tirées est égal à 4».

Calculer la probabilité P(A) de l'événement A et montrer que $P(B) = \frac{1}{4}$.

2) **On choisit au hasard une des deux urnes U et V puis on tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne.**

On considère les événements suivants :

- E: « l'urne choisie est **V**»
- F: « le produit des nombres portés par les deux boules tirées est égal à 4».

a- Vérifier que $P(F \cap E) = \frac{5}{28}$ et calculer $P\left(F \cap \overline{E}\right)$.

b- Déduire P(F).

3) **On tire au hasard une boule de U et on tire simultanément et au hasard deux boules de V.**

Calculer la probabilité de l'événement H : « le produit des 3 nombres portés par les trois boules tirées soit égal à 8 ».

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur]1 ; + ∞[par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. En déduire les asymptotes de (C).

2) Vérifier que $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

b- Démontrer que $g(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$.

c- Soit (G) la courbe représentative de g dans le même repère que (C). Tracer (G).

5) Soit h la fonction définie sur] 1 ; + ∞ [par h(x) = x f(x).

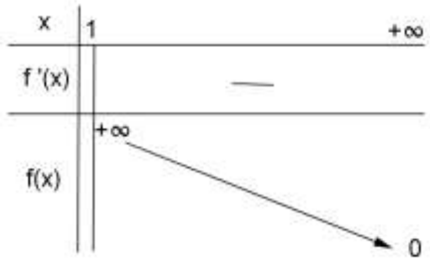
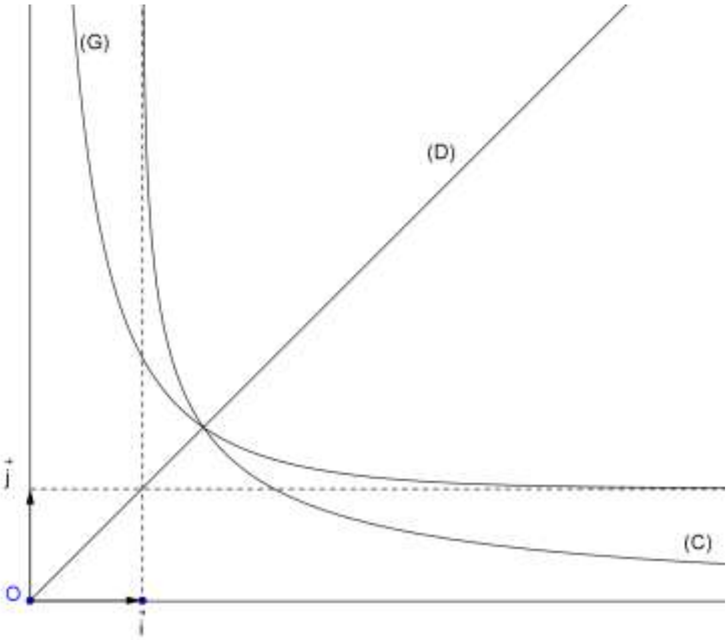
a- Vérifier que $f(x) = h'(x) + \frac{2x}{x^2-1}$ et déterminer, sur]1 ; + ∞[, une primitive F de f.

b- Calculer l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 2 et x = 3.

I	Corrigé		Note
1	$z - z' = 1 - i\sqrt{3},\ z - z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.	**b**	1
2	Si A (2i) et B (– 4i) alors $\lvert z-2i\rvert = \lvert z+4i\rvert \Leftrightarrow AM = BM$ par suite M décrit la médiatrice de [AB] qui est parallèle à l'axe des abscisses.	**c**	1
3	Si z=2 alors 9 + 1 = 2(2^2 + 1) (oui).	**c**	1
4	$\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sqrt{3}+i} = \frac{e^{-i\theta}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$.	**a**	1

II	Corrigé	Note
1	$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ (Q) : x – z – 3 = 0. Ou : on montre que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation donnée.	0.5
2a	$\overrightarrow{N}$ (1 ; –2 ; 1) est normal à (P) ; $\overrightarrow{N'}$ (1 ; 0 ; –1) est normal à (Q) et $\overrightarrow{N} . \overrightarrow{N'} = 0$. donc (P) et (Q) sont perpendiculaires. Les coordonnées de B et C vérifient l'équation de (P) et celle de (Q).	1
2b	$d_{A/(BC)} = d_{A/(P)} = \frac{\lvert 2+4-1+1\rvert}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$. Ou $d = \frac{\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\rVert}{\lVert \overrightarrow{BC}\rVert} = \sqrt{6}$.	1
3a	t – 1 – 2t – 2 + t + 2 + 1 = 0 alors (d) est incluse dans (P).	0.5
3b	$\overrightarrow{BC}$ (1 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de (d) alors (d) est parallèle à (BC) et la distance de M à (BC) est constante. Alors l'aire du triangle MBC sera constante. Ou : calculons la distance de M(t –1 ; t +1 ; t +2) à (BC) qui est égale à la distance de M à (Q) et démontrons qu'elle est indépendante de t. Ou : calculons l'aire du triangle MBC : $\frac{1}{2}\lVert \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{BC}\rVert = \frac{1}{2}\sqrt{54}$ = constante.	1

III	Corrigé	Note
1	$P(A) = \frac{C_4^2}{C_8^2} + \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{9}{28}$. $P(B) = \frac{C_3^2}{C_8^2} + \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_8^2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$.	1
2a	$P(F \cap E) = P(E) \times P(F/E) = \frac{1}{2} \times \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{28}$. $P(F \cap \overline{E}) = P(\overline{E}) \times P(F/\overline{E}) = \frac{1}{2} \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.	1.5
2b	$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E}) = \frac{5}{28} + \frac{1}{8} = \frac{17}{56}$.	0.5
3	P(produit = 8) = P(2 ;{2 , 2}) + P(4 ;{2 ,1})= $\frac{3}{8} \times \frac{C_5^2}{C_8^2} + \frac{1}{8} \times \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^2} = \frac{45}{224}$.	1

IV	Corrigé	Note
1	$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$. Les droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$ sont des asymptotes à (C).	1.5
2	$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{(x+1)}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} < 0$. 	1
3		1
4a	Sur]1 ; +∞[; f est , continue et strictement décroissante, donc elle admet une fonction réciproque g définie sur]0 ;+∞[.	0.5
4b	$f(g(x)) = x$ donne $\ln\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = x$; $\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = e^x$ donc $g(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$. OU $g(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2x}{2} = x$.	1
4c	(G) se déduit de (C) par symétrie par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$. (Voir figure – question 3)	1
5a	$h'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ donc $f(x) = h'(x) + \frac{2x}{x^2-1}$. $F(x) = h(x) + \ln(x^2-1) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln(x^2-1)$.	1.5
5b	$A = F(3) - F(2) = 3\ln2 + \ln8 - 2\ln3 - \ln3 = 2\ln8 - 3\ln3$; $A = (2\ln8 - 3\ln3)\ u^2$.	0.5