الدورة الإستثنائية للعام 2009	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	عدد المسائل: اربع

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) d'équation $x - y + z + 2 = 0$ et les deux droites (D) et (D') d'équations paramétriques:

$$(D)\begin{cases}x = t\\ y = -t+1\\ z = 2t-1\end{cases} \quad \text{et} \quad (D')\begin{cases}x = -5m-10\\ y = 5m+11\\ z = -2m-5\end{cases}$$ où t et m sont deux paramètres réels.

1) Montrer que (D) et (D') se coupent au point A(0 ;1 ; –1) et vérifier que A appartient au plan (P).

2) Ecrire une équation du plan (Q) qui contient les deux droites (D) et (D').

3) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d), intersection de (P) et (Q).

4) Vérifier que le point B(1 ; 0 ;–3) de la droite (d), est équidistant des deux droites (D) et (D'), et déduire que (d) est une bissectrice de l'angle de (D) et (D').

II- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives 2, – i, z et z' avec $z' = \dfrac{iz-1}{z-2}$. $(z \neq 2)$.

1) Trouver les coordonnées de M lorsque $z' = 1+2i$.

2) Donner une interprétation géométrique de $|z-2|$ et de $|iz-1|$ et déterminer l'ensemble des points M tels que $|z-2| = |iz-1|$.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' sont des réels).

a- Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b- Montrer que lorsque z' est imaginaire pur, M se déplace sur une droite dont on déterminera une équation.

c- Montrer que lorsque z est réel, M' se déplace sur une droite dont on déterminera une équation.

III- (4 points)

Le tableau suivant représente la distribution des âges de 26 hommes et 24 femmes.

Age en années	$[20;25[$	$[25;30[$	$[30;35]$
Nombre d'hommes	8	8	10
Nombre de femmes	5	9	10

On choisit au hasard, 3 personnes parmi ces 50 personnes pour former un comité.
Soit les événements suivants:

M: «le comité est formé de trois hommes».
F : «le comité est formé de trois femmes».
A : «le comité est mixte (formé d'hommes et de femmes)».
B : «l'âge de chaque membre du comité est inférieur à 30 ans».

1) Calculer chacune des probabilités $p(M)$, $p(F)$ et $p(A)$.

2) a- Calculer p(B) et montrer que $p\left(B\cap\bar{A}\right)=\frac{33}{700}$. En déduire $p\left(B\cap A\right)$.

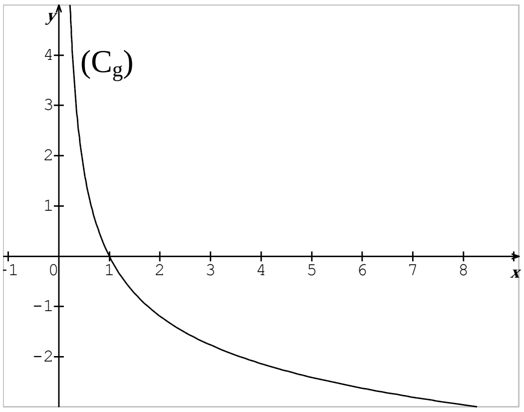
b- Calculer $p\left(B/A\right)$.

3) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre des femmes d'un comité dont l'âge est inférieur à 25 ans.
Déterminer la loi de probabilité de X.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie, sur $]0;+\infty[$, par $f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

La courbe (C_g) ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction g définie, sur $]0;+\infty[$, par $g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$.



1) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C_g), l'axe des abscisses et la droite d'équation x = 2.

2) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$ et en déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer les asymptotes de la courbe (C).

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

6) Trouver une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

7) Tracer (C).

8) Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $\ln x = me^x - 1$.

وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	الدورة الإستثنائية للعام 2009
مشروع معيار التصحيح	مسابقة في مادة الرياضيات	

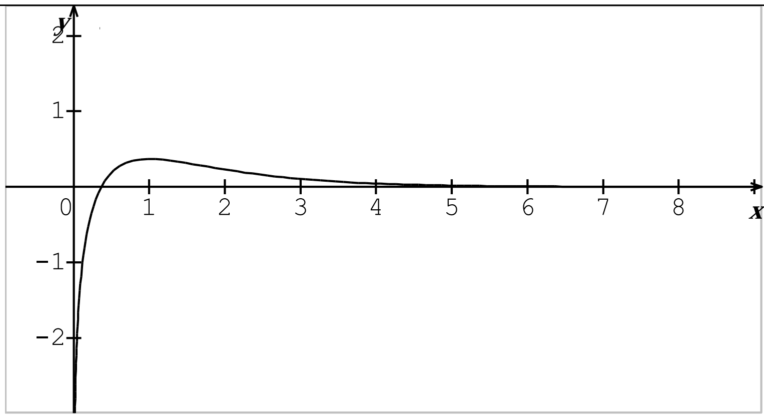
QI	Corrigé	Note
1	x = 0 , donc t = 0 ; y =1 et z = -1 m= -2 ; y =1 et z = -1. A(0,1,-1) est le point d'intersection des deux droites. (P) : x – y + z + 2 = 0. 0 – 1 – 1 + 2 = 0, donc A appartient au plan (P).	1
2	$\overrightarrow{V_{(D)}}(1,-1,2)$ $\overrightarrow{V_{(D')}}(-5,5,-2)$ et $A(0,1,-1)M(x,y,z)$ est un point du plan (Q). Equation de (Q) est $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{V_{(D)}}\wedge\overrightarrow{V_{(D')}})=0$ $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{V_{(D)}},\overrightarrow{V_{(D')}}) = \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -8x-8y+8=0$ $(Q): x+y-1=0$	1
3	(P): x – y + z + 2 = 0 (Q): x + y - 1 = 0. $(d)\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha+1 \\ z=-2\alpha-1 \end{cases}$	0.5
4	B appartient à (d) et $y_B = 0$, donc $\alpha = 1$, par suite x = 1 et z = -3 d'où B(1,0, -3) Soit C(1,0,1) un point de (D). (t = 1) $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{V_{(D)}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i}+4\vec{j}$. $d(B,(D))= \dfrac{\left\Vert \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{V_{(D)}} \right\Vert}{\left\Vert \overrightarrow{V_{(D)}} \right\Vert} = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{16}{3}}$. Soit E (-5,6,-3) un point de (D ') (m = -1) $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{V_{(D')}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 6 & 0 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i}-12\vec{j}$ $d(B,(D'))= \dfrac{\left\Vert \overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{V_{(D')}} \right\Vert}{\left\Vert \overrightarrow{V_{(D')}} \right\Vert} = \dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{54}} = \sqrt{\dfrac{16}{3}}$. donc B est équidistant de (D) et (D'). A est l'intersection de(D) et (D'), donc A est équidistant de (D) et (D') La droite (d) est contenue dans le plan (Q) et passe par A et B (D') donc (d) est une bissectrice de l'angle de (D) et (D').	1.5

QII	Corrigé	Note

1	$1 + 2i = \frac{iz-1}{z-2}$; $(1 + i)z = 1 + 4i$; $z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$; $M(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{3}{2})$.	0.5
2	$\|z - 2\| = AM$ et $\|iz - 1\| = \|i.(z+i)\| = \|i\|.\|z+i\| = \|z+i\| = BM$. $\|z - 2\| = \|iz - 1\| \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow$ M décrit la médiatrice du segment [AB].	1
3a	$x' + iy' = \frac{-y-1+ix}{x-2+iy} = \frac{2y-x+2+i(x^2+y^2-2x+y)}{(x-2)^2+y^2}$ $x' = \frac{2y-x+2}{(x-2)^2+y^2}$ et $y' = \frac{x^2+y^2-2x+y}{(x-2)^2+y^2}$	0.5
3b	z' est imaginaire pur si x'= 0 et z' ≠ 0 ; 2y – x + 2 = 0 avec z ≠ – i et z ≠ 2. L'ensemble des points M est la droite (d) d'équation : $y = \frac{x}{2} - 1$ privée des points : A(2,0) et B(0,–1).	1
3c	z est un réel si y = 0 : $x' = \frac{-1}{x-2}$ et $y' = \frac{x}{x-2}$; y' = – 2x'+1 et M' se déplace sur la droite d'équation : y = –2x +1.	1

QIII.	Corrigé	Note
1	$P(M) = \frac{C_{26}^3}{C_{50}^3} = \frac{2600}{19600} = \frac{13}{98}$. $P(F) = \frac{C_{24}^3}{C_{50}^3} = \frac{2024}{19600} = \frac{253}{2450}$. $P(A) = 1 - P(M) - P(F) = \frac{936}{1225} = 0,764$.	1
2a	$P(B) = \frac{C_{30}^3}{C_{50}^3} = 0,207$. $P(B \cap \bar{A}) = \frac{C_{16}^3 + C_{14}^3}{C_{50}^3} = \frac{33}{700}. = 0,047$. $p(B \cap \bar{A}) = 0,047$, $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$ Donc $p(B \cap A) = 0,207 - 0,047 = 0,16$.	1.5
2b	$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = 0,21$,	0.5
3	Les valeurs possibles de X : 0,1,2,3 <table><tr><td>X= x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>p_i</td><td>$\frac{C_5^0 \times C_{45}^3}{C_{50}^3} = \frac{1419}{1960}$</td><td>$\frac{C_5^1 \times C_{45}^2}{C_{50}^3} = \frac{99}{392}$</td><td>$\frac{C_5^2 \times C_{45}^1}{C_{50}^3} = \frac{9}{392}$</td><td>$\frac{C_5^3}{C_{50}^3} = \frac{1}{1960}$</td></tr></table>	1

QIV	Corrigé	Note
1	$A = \left\| \int_1^2 g(x)dx \right\| = -\left[\ln x - x - x \ln x + x\right]_1^2 = \ln 2$ u.a.	1

<table>
<tr><td>2</td><td>$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}e^x - e^x(1+\ln x)}{(e^x)^2} = \dfrac{g(x)}{e^x}$ et $e^x > 0$ alors le signe de f´(x) est celui de g(x) donc f '(x) > 0 pour x < 0 , f '(1) = 0 et f(1) = $\dfrac{1}{e}$.</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$ alors y´y est une asymptote à (C).
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ ind. (Hop) = $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{xe^x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ alors y = 0 est une asymptote à (C).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$\|$</td><td>+</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\|-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\dfrac{1}{e}$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>f (x) = 0 ; 1+lnx = 0 ; x= $\dfrac{1}{e}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>x= $\dfrac{1}{e}$ alors $f(\frac{1}{e}) = 0$ et $f'(\frac{1}{e}) = e^{1-\frac{1}{e}}$ la tangente : y = $e^{1-\frac{1}{e}}$ (x - $\dfrac{1}{e}$)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>lnx = me^x – 1 est équivalente à f(x) = m.
pour m$\leq$ 0 une solution .
pour 0 < m < $\dfrac{1}{e}$ deux solutions
pour m = $\dfrac{1}{e}$ une solution double.
Pour m > $\dfrac{1}{e}$ pas de solutions.</td><td>1</td></tr>
</table>