الدورة الإستثنائية للعام 2009	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	عدد المسائل : ست

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات0

- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)0

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Soit f la fonction définie sur $IR-\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ et g la fonction définie sur $IR\text{-}\{1\}$ par $g(x)=\frac{x}{x\text{-}1}$. Le domaine de définition de $g\circ f$ est :	$IR-\{0\}$	$IR-\{1\}$	$IR-\{0;1\}$
2	$\neg\left(p\Rightarrow q\right)$ est équivalente à :	$p\wedge(\neg q)$	$(\neg p)\wedge(\neg q)$	$(\neg q)\Rightarrow(\neg p)$
3	A, M et N sont trois points distincts d'affixes respectives i, z_1 et z_2. Si $z_2=iz_1+1+i$, alors le triangle AMN est:	équilatéral	demi-équilatéral	rectangle isocèle
4	Avec 10 points distincts situés sur un cercle on peut déterminer :	720 triangles	120 triangles	150 triangles
5	La fonction f définie sur $]0;1]$ par $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, admet une fonction réciproque *g* définie par :	$g(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$g(x)=\frac{1}{x^2-1}$	$g(x)=\frac{1}{x^2+1}$
6	Si $z=-2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, alors $\arg\left(\bar{z}\right)=$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$

II- (2 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

On considère le point $A(-1\,;\,1\,;\,0)$, le plan (P) d'équation $x - 2y + 2z - 6 = 0$ et la droite (D) définie par le système $x = 2m - 3$; $y = 3m - 2$; $z = 2m - 2$ (m est un paramètre réel).

1) a- Vérifier que A n'appartient pas à (P) et calculer la distance de A à (P).

b- Montrer que (D) passe par A et qu'elle est parallèle à (P).

2) a- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (P).

b- Déterminer les coordonnées du point B intersection de (d) et (P).

c- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ_0) passant par B et parallèle à (D) et montrer que (Δ_0) est une droite du plan (P).

3) Soit (Δ) une droite du plan (P) , distincte de (Δ_0) et passant par B .

a- Montrer que (Δ) et (D) ne sont pas coplanaires .

b- Montrer que (AB) est perpendiculaire à (Δ) et à (D).

III- (3 points)

Dans un plan orienté on donne un rectangle ABCD tel que :

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(\mathrm{mod}\,2\pi\right)$, $AB = 4$ et $AD = 3$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BD) et h l'homothétie de centre H qui transforme D en B .

1) a- Déterminer l'image de la droite (AD) par h.

b- En déduire l'image E du point A par h. Placer E.

c- Construire le point F image de B par h et le point G image de C par h puis déterminer l'image du rectangle ABCD par h.

2) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et D en A .

a- Déterminer un angle de S .

b- Déterminer l'image de la droite (AH) par S et l'image de la droite (BD) par S.

c- En déduire que H est le centre de S .

3) Montrer que $S(B) = E$ et en déduire que $S \circ S(A) = h(A)$.

4) Montrer que $S \circ S = h$.

IV- (3 points)

Une urne contient **trois** boules blanches et **deux** boules noires.

Un joueur tire **successivement** et **au hasard** trois boules de l'urne en respectant la règle suivante:

Pour chaque tirage : si la boule tirée est noire, il la remet dans l'urne ;

si elle est blanche, il ne la remet pas dans l'urne.

1) a- Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b-Montrer que la probabilité qu'il y ait une seule boule blanche parmi les trois boules tirées

est égale à $\frac{183}{500}$.

2) Lors du tirage des trois boules, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués par le joueur.

a- Montrer que les valeurs possibles de X sont : 6, 7, 8 et 9.

b- Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

3) Le joueur tire maintenant **successivement** et **au hasard** n boules de l'urne ($n > 3$) en respectant la même règle.

a- Calculer, en fonction de n, la probabilité de l'événement : « le joueur tire n boules noires ».

b- Calculer, en fonction de n, la probabilité P_n de l'événement :

« le joueur tire au moins une boule blanche ».

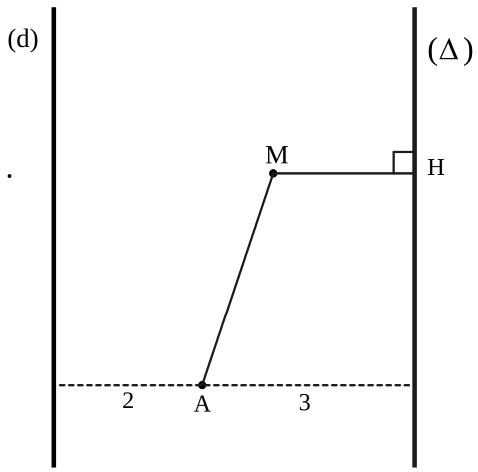
c- Quel est le nombre minimal de boules que le joueur doit tirer pour que $P_n \geq 0,99$?

V- (3 points)

Dans un plan, on donne deux droites parallèles (d) et (Δ) distantes de 5 cm et un point A situé entre (d) et (Δ) à une distance de 3 cm de (Δ).

M est un point variable du plan et H son projeté orthogonal sur (Δ).

1) Montrer que si MA + MH = 5 cm, alors M se déplace sur une parabole (S) de foyer A.



Dans ce qui suit , le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ *tel que* $A(1\;;\;0)$.

2) a- Montrer que $y^2 = 4x$ est une équation de la parabole (S) .

b- Tracer (S) .

3) Soit E un point de (S) d'**ordonnée** a telle que $a \neq 0$.

Montrer que $4x - 2ay + a^2 = 0$ est une équation de la tangente (d_1) à (S) en E .

4) Soit G un point de (S) d'ordonnée b tel que $E\hat{O}G = 90^\circ$.

a- Montrer que $ab = -16$.

b- La tangente (d_2) à (S) en G coupe (d_1) en un point L .

Montrer que , lorsque E et G varient sur (S) tels que $E\hat{O}G = 90^\circ$, le point L décrit une droite que l'on déterminera.

VI- (7 points)

A-

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 3$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b- Résoudre l'équation f(x) = 0 .

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que O est un point d'inflexion de (C).

4) Ecrire une équation de la tangente (T) en O à (C).

5) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = f(x) + 2x$.

a- Montrer que $h'(x) \geq 0$ pour tout réel x.

b- En déduire, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (T).

6) Tracer (T) et (C).

7) Calculer l'aire du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations: x = 0 et x = ln3.

8) a- Montrer que f admet, sur $[\ln 2; +\infty[$, une fonction réciproque f^{-1}.

b- Montrer que l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$ admet une solution unique α et vérifier que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

B-

Soit g la fonction donnée par $g(x) = \ln[f(x)]$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Justifier que le domaine de définition de g est $]-\infty; 0[\cup]\ln 3; +\infty[$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$. Déduire une asymptote (D) à (Γ).

3) Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à (Γ) en $+\infty$.

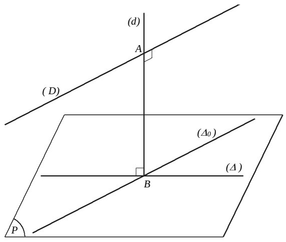
4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec (d) et (D).

5) Dresser le tableau de variations de g.

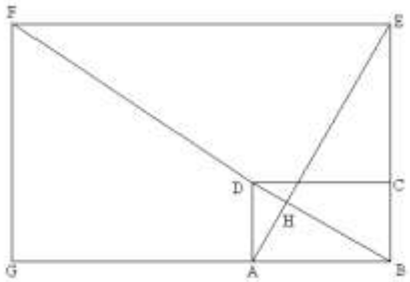
6) Tracer (Γ).

الدورة الإستثنائية للعام **2009**	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
	مسابقة في مادة الرياضيات	**مشروع معيار التصحيح**

QI	Corrigé	Note
1	$g\circ f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in IR-\{0\}$ et $f(x)\neq 1$. donc le domaine de définition de $g\circ f$ est $IR-\{0;1\}$. (c)	0.5
2	$p\Rightarrow q$ est $\neg p\vee q$ donc $\neg(p\Rightarrow q)$ est équivalente à $p\wedge(\neg q)$. (a)	0.5
3	$\dfrac{z_{\overrightarrow{AN}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}=\dfrac{z_2-i}{z_1-i}=\dfrac{iz_1+1+i-i}{z_1-i}=\dfrac{i(z_1-i)}{z_1-i}=i$ Donc $AM=AN$ et $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN})=\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$, le triangle AMN est rectangle isocèle en A. (c)	1
4	Avec 10 points distincts situés sur un cercle on peut déterminer $C_{10}^3=120$ triangles. (b)	0.5
5	$y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ donne $y^2=\dfrac{1-x}{x}$ par suite $x=\dfrac{1}{y^2+1}$, donc $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$. (c)	1
6	$\bar{z}=-2\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-i\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$, $\arg(\bar{z})=\dfrac{5\pi}{6}$. (b)	0.5

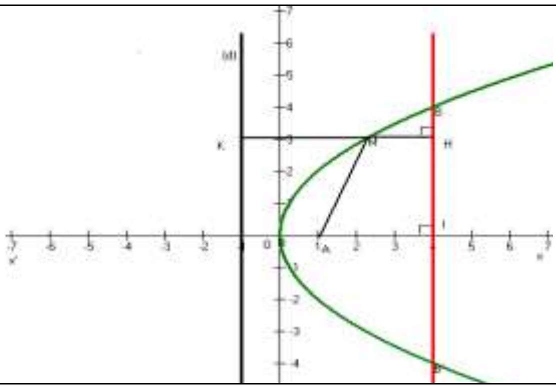
QII	Corrigé	Note
1a	$-1-2-6=-9\neq 0$, A n'appartient pas à (P) ; $d(A;(P))=3$.	0.5
1b	A est le point de (D) correspondant à $m=1$; $(D)\cap(P)=\phi$. <u>ou</u> $\vec{n}(1;-2;2)\perp(P)$, $\vec{u}(2;3;2)\,//\,(D)$ et $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.	0.5
2a	$\vec{n}(1;-2;2)$ est un vecteur directeur de (d) ; (d) : $x=t-1$; $y=-2t+1$; $z=2t$.	0.5
2b	$(d)\cap(P)=\{B(0;-1;2)\}$.	0.5
2c	$\vec{u}(2;3;2)$ est un vecteur directeur de (Δ_0) ; (Δ_0) : $x=2\lambda$; $y=3\lambda-1$; $z=2\lambda+2$. (D) est parallèle à (P) et (Δ_0) passe par le point B de (P) et est parallèle à (D) ; alors , (Δ_0) est une droite de (P).	0.5
3a	(Δ) n'est pas parallèle à (D) car (Δ_0) est parallèle à (D) et $(\Delta)\neq(\Delta_0)$. (Δ) et (D) ne sont pas sécantes car (D) est parallèle à (P) et (Δ) est une droite de (P). Donc (Δ) et (D) ne sont pas coplanaires.  	
3b	(AB) est perpendiculaire à (P) en B ; alors (AB) est perpendiculaire à (Δ) et à (Δ_0) en B. Or (Δ_0) est parallèle à (D) ; donc (AB) est perpendiculaire à (D) en A et à (Δ_0) en B.	0.5

QIII	Corrigé	Note
1a	$h(D)=B$, donc l'image de la droite (AD) est la droite passant par B et parallèle à (AD), donc $h(AD)=(BC)$.	0.5

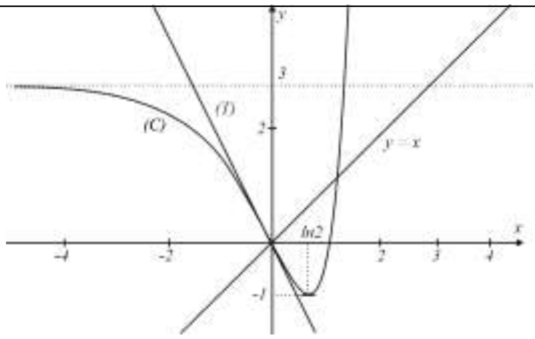
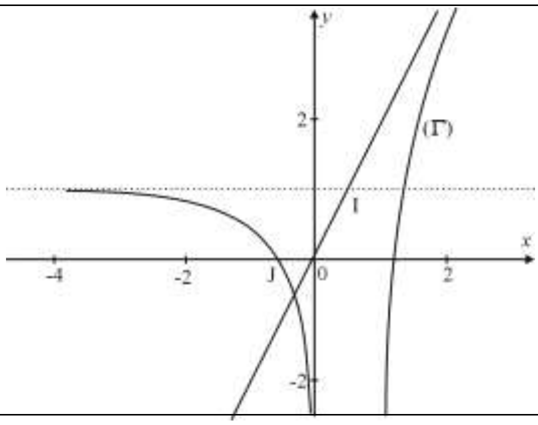
1b	$E \in (AH)$. $A \in (AD)$, donc $E \in (BC)$, par suite $\{E\} = (AH) \cap (BC)$.  	0.5
1c	$F \in (BH)$. $B \in (AB)$, donc $F \in (d)$passant par E et parallèle à (AB), par suite $\{F\} = (BH) \cap (d)$. G est l'intersection de (HC) avec la parallèle menée de B à (DC). L'image du rectangle *ABCD*par h est le rectangle *EFGB*	1
2a	$\alpha = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$	0.5
2b	$S(A) = B$, donc l'image de la droite (AH) est la droite passant par *B* et perpendiculaire à (AH), donc c'est (BD). $S(D) = A$, donc l'image de la droite (BD) est la droite passant par *A* et perpendiculaire à(BD), donc c'est(AH).	1.5
2c	$\{H\} = (AH) \cap (BD)$, donc $\{S(H)\} = (BD) \cap (AH)$, donc $S(H) = H$ par suite *H* est le centre de *S* .	0.5
3	$B \in (BD)$, donc $S(B) \in (AH)$ et *S*(*AB*) = (*BC*) donc $S(B) = E$ intersection des deux droites (*AH*) et (*BC*). $S \circ S(A) = S(S(A)) = S(B) = E = h(A)$.	1
4	*SoS* est une similitude de centre *H* et d'angle π, d'où *SoS* est une homothétie négative. Comme $\mathrm{S} \circ \mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{h}(\mathrm{A})$, alors *SoS* = *h*,	0.5

QIV	Corrigé	Note
1a	$P_r(nnb) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{125}$	0.5
1b	$P_r(bnn)+P_r(nbn)+P_r(nnb) = \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{75+60+48}{500} = \frac{183}{500}$	1
2a	Dans trois tirages successifs, on obtient : 3 noires ou 1 blanche et 2 noires ou 2 blanches et 1 noire ou 3 blanches,parsuite les valeurs possibles de X sont : 6;7;8 et 9.	0.5
2b	$P_r(X=6) = P_r(0\text{boule blanche}) = P_r(nnn) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$ $P_r(X=7) = P_r(1\text{boule blanche}) = P_r(F) = \frac{183}{500}$; $P_r(X=8) = P_r(2\text{boules blanches})$ $= P_r(bbn)+P_r(bnb)+P_r(nbb) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{235}{500}$ $P_r(X=9) = P_r(3\text{boules blanches}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$	2

	E(X)= $\dfrac{6\times32+7\times183+8\times235+9\times50}{500}=7,606$	
3a	P_r (n boules noires en n triages)= $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$	0.5
3b	P_r(au moins une boule blanche)=1- $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ =P_n	1
3c	$P_n \geq 0.99 \Leftrightarrow 1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \geq 0.99 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \leq 0.01 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0.01}{\ln(0.4)} \Leftrightarrow n \geq 5.026$ Donc le nombre minimal des triages est 6.	0.5

QV	Corrigé	Note
1	(MH) est perpendiculaire à (d) en K. $MA+MH=MK+MH=5$ alors $MA=MK=d(M$ (S) est la partie de la parabole (P) de foyer A et de directrice (d) située entre (d) et (Δ).	1
2a	$A(1\,;0)$ et $(d): x=-1$ alors $(P): y^2=4x$ .car l'origine est le sommet et p = 2.	1
2b		
3	$2yy'=4$; $y'=\dfrac{2}{y}$ d'où (d_1) : $y-a=\dfrac{2}{a}\left(x-\dfrac{a^2}{4}\right)$ alors (d_1): $4x-2ay+a^2=0$	0.5
4a	$M(\dfrac{a^2}{4}\,;a)$ et $M(\dfrac{b^2}{4}\,;b)$. $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0$ donne $ab=-16$.	1
4b	(d_2) : $4x-2by+b^2=0$. $(d_1)\cap(d_2)=\left\{L(-4\,;\dfrac{a+b}{2})\right\}$ .Lorsque M et N varient sur (P), y_L décrit IR. L se déplace sur la droite d'équation $x=-4$.	1.5

QVI	Corrigé	Note
A1a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^x-4\right)+3\right]=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x}{x}\left(e^x-4\right)+\dfrac{3}{x}\right]=+\infty.$	1
A1b	$f(x)=0$, $e^x=1$ ou $e^x=3$; $x=0$ ou $x=\ln 3$	0.5
A2	$f'(x)=2e^x\left(e^x-2\right)$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \ln 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 3 & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1

A3	$f''(x)=4e^{x}(e^{x}-1)$, $f''(x)>0$ pour $x>0$, $f''(x)<0$ pour $x<0$ et $f''(x)=0$ pour $x=0$, $f(0)=0$.	1
A4	$y-0=f'(0)(x-0)$ et $f'(0)=-2$, d'où $y=-2x$.	0.5
A5a	$h'(x)=f'(x)+2=2(e^{x}-1)^{2}$. $h'(x)\geq 0$ pour tout x.	1
A5b	$h(x)=f(x)-(-2x)$, h est strictement croissante et $h(0)=0$, $x>0$, $h(x)>0$ donc (C) est au-dessus de (T). $x<0$, $h(x)<0$ donc (C) est au-dessous de (T). (C) et (T) se coupent en O.	1
A6	y = 3 est une asymptote en $-\infty$ et y'y est une direction asymptotique en $+\infty$ 	1.5
A7	$S=\int_{0}^{\ln 3}-f(x)dx=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+4e^{x}-3x\right]_{0}^{\ln 3}=(4-3\ln 3)$ unités d'aire.	1
A8a	f est continue et strictement croissante sur $[\ln 2;+\infty[$, f admet une fonction réciproque f^{-1}.	0.5
A8b	Les courbes des deux fonctions f et f^{-1} se coupent sur la droite d'équation $y=x$. La droite d'équation $y=x$ coupe (C) en un seul point d'abscisse α . Soit $\psi(x)=f(x)-x$, $\psi(1,2)\approx -0,4$, $\psi(1,3)\approx 0,4$ donc $\alpha\in]1,2;1,3[$.	1
B1	$f(x)>0$ pour $x<0$ ou $x>\ln 3$ donc le domaine de définition de g est $]-\infty;0[\cup]\ln 3;+\infty[$.	0.5
B2	$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\ln 3$ donc y=ln3 est une asymptote horizontale à(Γ) .	0.5
B3	$\lim_{x\to+\infty} g(x)-2x=\lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-4e^{x}+3)-\ln e^{2x}=\lim_{x\to+\infty} \ln(1-4e^{-x}+3e^{-2x})=0$.	0.5
B4	$g(x)=\ln 3$ donne $e^{2x}-4e^{x}=0$, $x=\ln 4$, $I(\ln 4;\ln 3)$. $g(x)=2x$ donne $-4e^{x}+3=0$, $J\left(\ln\frac{3}{4};2\ln\frac{3}{4}\right)$.	0.5
B5	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 \quad \ln 3 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & \| \quad \| & + & \\ \hline g(x) & \ln 3 & \searrow -\infty & \| \quad \| & -\infty \nearrow & +\infty \end{array}$	1
B6		1