الشهادة المتوسطة

دورة سنة 2009 الإستثنائية

مسابقة في مادة الرياضيات
الاسم:
عدد المسائل : خمسة
المدة: ساعتان
الرقم:

ارشادات عامة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة.

I. (3 points)

On donne cinq points distincts O, I, K, L et S tels que :

$$OI = \frac{5}{2} - \cos 60° \quad , \quad OK = \frac{2\times10^3\left[\left(2\times10^{-1}\right)^2+\left(6\times10^{-2}\right)\right]}{5\times10^{-1}\times2\times10^2}$$

$$OL = 20\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{15}-\frac{3}{5}\right) \quad \text{et} \quad OS = \frac{(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+\sqrt{2})}{\sqrt{16}} .$$

1) Calculer OI, OK, OL et OS en détaillant les calculs, et donner chaque résultat sous forme d'un entier naturel.
2) Démontrer que les points I , K , L et S appartiennent à un même cercle de centre O.

II. (3 points)

Voici le relevé des notes sur 60, de 20 élèves :

Notes	45	48	52	56	58	60
Effectifs	3	6	4	2	1	4
Effectifs cumulés croissants						

1) Quelle est la fréquence de la note 52 ?
2) Compléter le tableau par les effectifs cumulés croissants.
3) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants.
4) Quel est le pourcentage des élèves ayant une note supérieure à 57 ?
5) Déterminer la moyenne des notes des élèves.

III. (4 points)

On donne $E(x) = (2x-1)^2 + (x-2)(1-2x)$ et $F(x) = ax^2 + bx - 2$.

1) Factoriser E(x).
2) Calculer a et b pour que F(1) = 5 et F (-2) = 20.
3) Soit $Q(x)= 6x^2 + x - 2$. Vérifier que Q(x) = (2x-1) (3x+2).
4) Soit $P(x) = \dfrac{E(x)}{Q(x)}$.
   a) Pour quelles valeurs de x, P(x) est-il défini ? Simplifier P(x).
   b) Résoudre l'équation P(x) = 0.
   c) L'équation $P(x) = \dfrac{3}{7}$ a-t- elle une solution? Justifier.

IV . (5 points)

Dans un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy où l'unité de longueur est le centimètre , on donne les points $A(-2; 3)$, $B(1;-1)$, $C(9; 5)$ et la droite (d) d'équation $y = 2x - 13$.

1) Placer les points A, B et C et tracer la droite (d).

2) Calculer les coordonnées du point N, point d'intersection de (d) avec l'axe x'Ox.

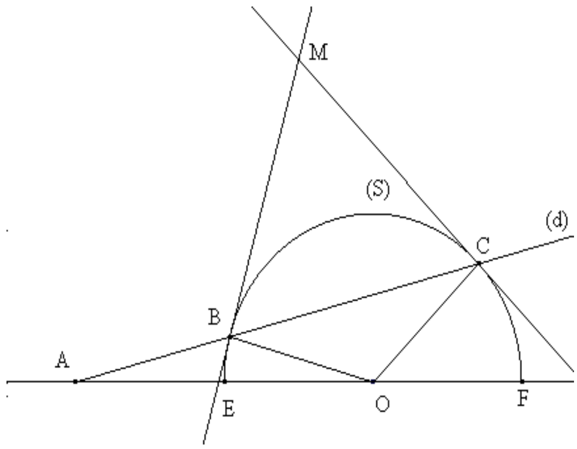
3) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

4) Soit M le milieu de [AC]. Calculer les coordonnées de M.

5) Démontrer que N est le translaté de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{MB}$.

6) Démontrer que le quadrilatère BMCN est un losange.

V. (5 points)



Dans la figure ci-contre :

- (S) est un demi-cercle de centre O et de rayon R
- [EF] est le diamètre de (S)
- A est un point de (EF) tel que OA=2R
- (d) est une droite variable passant par A et coupant (S) en B et C
- Les tangentes en B et C à (S) se coupent en M.

1) Justifier que (OM) est la médiatrice de [BC].

2) (OM) coupe [BC] en I. Soit P le pied de la perpendiculaire menée de M à (OA).

   a. Démontrer que les triangles OIA et OMP sont semblables.

   b. Etablir la relation $OA \times OP = OM \times OI$.

3) **a.** Soit (S') le cercle circonscrit au triangle CIM. Démontrer que (OC) est tangente à (S').

   b. Utiliser deux triangles semblables pour démontrer que $OM \times OI = R^2$.

   c. Calculer OP en fonction de R. Déduire le lieu géométrique de M lorsque (d) varie.

4) **Dans cette question, on suppose que OBMC est un carré** :

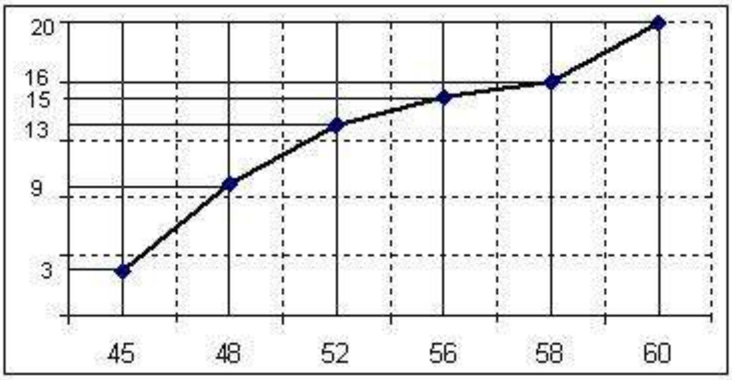
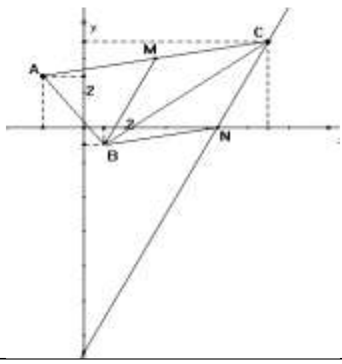
   a. Calculer en fonction de R les longueurs BC et MP.

   b. Calculer la valeur exacte de tan $\widehat{MAP}$.

   c. Calculer la valeur de $\widehat{MAP}$ à un degré près.

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

مشروع معيار التصحيح

<table>
<tr><th colspan="2">Q.</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>1</td><td>$OI = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$
$OL = 20\left(\frac{25-4-18}{30}\right) = 20\left(\frac{3}{30}\right) = 2$. $OS = \frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{16}} = \frac{10-2}{4} = 2$.
$OK = \frac{2\times10^{3}\left[\left(4\times10^{-2}\right)+\left(6\times10^{-2}\right)\right]}{5\times2\times10} = \frac{2\times10^{3}\left[10^{-2}(4+6)\right]}{10^{2}} = \frac{2\times10\times10^{-1}}{1} = 2$.</td><td>2.50</td></tr>
<tr><td>2</td><td>OI = OK = OL = OS = 2 d’où les points I , K , L et S appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon = 2</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td rowspan="5">II</td><td>1</td><td>(Fréquence de 52) $= \frac{4}{20} = 0,2$</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>2</td><td><table><tr><td>Notes</td><td>45</td><td>48</td><td>52</td><td>56</td><td>58</td><td>60</td></tr><tr><td>Effectifs</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>Effectifs cumulés croissants</td><td>3</td><td>9</td><td>13</td><td>15</td><td>16</td><td>20</td></tr></table></td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{5}{20}\times100 = 25\%$</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\bar{x} = 52,05$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td rowspan="6">III</td><td>1</td><td>E(x) = (2x-1)(2x-1-x+2)=(2x-1)(x+1)</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>2</td><td>F(1) = a + b – 2 = 5; a + b = 7 F (-2) = 4a-2b-2 = 20 ; alors a = 6 et b =1</td><td>1.25</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(2x-1) (3x+2)= $6x^{2}+x-2$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>4a</td><td>a) $P(x) = \frac{(2x-1)(x+1)}{(2x-1)(3x+2)}$, $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{2}{3}$; $P(x) = \frac{x+1}{3x+2}$</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>4b</td><td>$x = -1$</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>4c</td><td>$\frac{x+1}{3x+2} = \frac{3}{7}$; 2x = 1; $x = \frac{1}{2}$ inacceptable car P(x) n’est pas définie.</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>1</td><td>Figure A,B et C
pour la droite (d):
<table><tr><td>x</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>–3</td><td>3</td></tr></table></td><td>1.25</td></tr>
</table>

	2	N (6,5; 0).	**0.25**
	3	ABC est un triangle rectangle en B car ….	**1**
	4	M (3,5 ; 4).	**0.50**
	5	$\overrightarrow{MB}$: $x_{\overrightarrow{MB}} = x_B - x_M = 1 - 3{,}5 = -2{,}5$; $y_{\overrightarrow{MB}} = y_B - y_M = -1 - 4 = -5$ $\overrightarrow{CN}$: $x_{\overrightarrow{CN}} = x_N - x_C = 6{,}5 - 9 = -2{,}5$; $y_{\overrightarrow{CN}} = y_N - y_C = 0 - 5 = -5$. Donc $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN}$, N est le translaté de C par $T_{\overrightarrow{MB}}$.	**1**
	6	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN}$, donc BMCN est un parallélogramme .Comme ABC est un triangle rectangle alors [BM] est la médiane relative à l'hypoténuse d'où $BM = \frac{AC}{2} = MC$, par suite BMCN est un losange.	**1**
	1	(OM) est la médiatrice de [BC] car….	**0.50**
	2a	$\widehat{OIA} = \widehat{OPM} = 90^\circ$ et $\widehat{POI}$ angle commun donc…	**0.50**
	2b	$\frac{OM}{OA} = \frac{MP}{AI} = \frac{OP}{OI}$; donc OA × OP = OM × OI	**0.50**
	3a	Le cercle circonscrit au triangle rectangle MCI est de diamètre [MC] (MC) $\perp$ (OC) donc (OC) est tangente à (S')	**0.50**
	3b	Les deux triangles OCI et OCM sont semblables car : $\widehat{OCM} = \widehat{OIC} = 90^\circ$ et $\widehat{COI}$ angle commun. $\frac{OI}{OC} = \frac{OC}{OM}$. Alors $OM \times OI = OC^2 = R^2$.	**0.75**
	3c	$OM \times OI = OA \times OP = R^2$, alors $OP = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$. O, A et P sont fixes donc Le lieu de M est la perpendiculaire en P a [OA].	**1**
	4a	$BC = OM = R\sqrt{2}$. $MP^2 = OM^2 - OP^2 = 2R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{7R^2}{4}$; $MP = \frac{R\sqrt{7}}{2}$	**0.75**
V	**4b**	$\tan \widehat{MAP} = \frac{MP}{AP} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.	**0.25**
	4c	$\widehat{MAP} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} = 41^\circ$ par défaut ou 42^o par excès.	**0.25**