دورة سنة 2009 العادية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	عدد المسائل : أربع

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z$.

1) On suppose dans cette partie que $z = 2i$.
   a- Déterminer la forme exponentielle de z'.
   b- Calculer $\left|\frac{z'}{z}\right|$ et $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)$.
   c- Montrer que le triangle OMM' est rectangle en M.

2) On suppose dans cette partie que $z = (1+i)^3$.
   a- Ecrire z sous formes exponentielle et algébrique.
   b- Ecrire z' sous formes exponentielle et algébrique.
   c- Déduire la valeur exacte de $\cos\frac{13\pi}{12}$.

II- (4 points)

On considère deux sacs $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$ tels que:
$\mathbf{S_1}$ contient **six** cartes numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.
$\mathbf{S_2}$ contient **cinq** cartes numérotées 0, 1, 2, 4, 5.

A-

Une carte est tirée au hasard du sac $\mathbf{S_1}$:
♦ si elle porte l'un des numéros 1 ou 2, on tire simultanément et au hasard **trois** cartes du sac $\mathbf{S_2}$.
♦ si elle porte l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6, on tire simultanément et au hasard **deux** cartes du sac $\mathbf{S_2}$.
On considère les événements suivants :
K : « la carte tirée du sac $\mathbf{S_1}$ porte l'un des numéros 1 ou 2 ».
L : « la carte tirée du sac $\mathbf{S_1}$ porte l'un des numéros 3, 4, 5 ou 6».
E : « Le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\mathbf{S_2}$ est zéro ».

1) a- Calculer les probabilités p(K) et p(L).
   b- Montrer que $p(E\cap K) = \frac{1}{5}$.
   c- Calculer $p(E\cap L)$ et déduire p(E).
2) Sachant que le produit des numéros portés par les cartes tirées du sac $\mathbf{S_2}$ est zéro, calculer la probabilité que l'on ait tiré trois cartes de $\mathbf{S_2}$.

B-

Dans cette partie, on utilise **seulement** le sac $\mathbf{S_2}$.
On tire simultanément et au hasard **trois** cartes de ce sac.
Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros portés par les trois cartes tirées, ainsi les valeurs possibles de X sont 2, 4 et 5 .
Démontrer que $p(X= 4) = \frac{3}{10}$ et déterminer la loi de probabilité de X.

III- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère le point A (1 ; 0 ; 1) et les deux plans (P) et (Q) d'équations respectives $2x - y - 2 = 0$ et $x + 2y - z = 0$.

1) a- Vérifier que A est un point commun à (P) et (Q).
   b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (d), intersection de (P) et (Q).

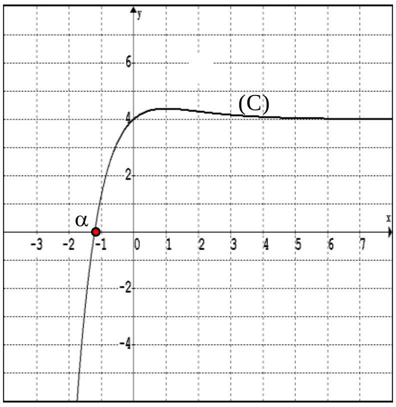
2) a- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (D) perpendiculaire en A à (P).
   b- Calculer les coordonnées d'un point E de (D) tel que $AE = \sqrt{5}$.

3) a- Montrer que les points B(0 ; –2 ; 0) et C(2 ; 2 ; t) appartiennent à (P). (t est un réel)
   b- Calculer t pour que le triangle ABC soit rectangle en B et trouver dans ce cas le volume du tétraèdre EABC.

IV- (8points)

A- On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 4 + x\,e^{-x}$ et dont la courbe représentative (C), dans un repère orthonormé est donnée par la figure ci-contre.

(C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $\boldsymbol{\alpha}$.



1) Utiliser (C) pour déterminer le signe de f(x).

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 x\,e^{-x}dx$, puis calculer l'aire du domaine limité par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe (C) et la droite d'équation x = 2.

B- Dans ce qui suit, on prend $\boldsymbol{\alpha}$ = -1,2.

On considère la fonction g, définie sur IR, par $g(x) = 4x - 3 - (x+1)e^{-x}$ et on désigne par (G) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$.

1) Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et déterminer g(– 2,5) à 10^{-2} près.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation y = 4x –3 est une asymptote à (G).

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (G) avec son asymptote (D) et étudier la position relative de (G) et (D).

4) a- Montrer que g'(x) = f(x).
   b- Dresser le tableau de variations de g.

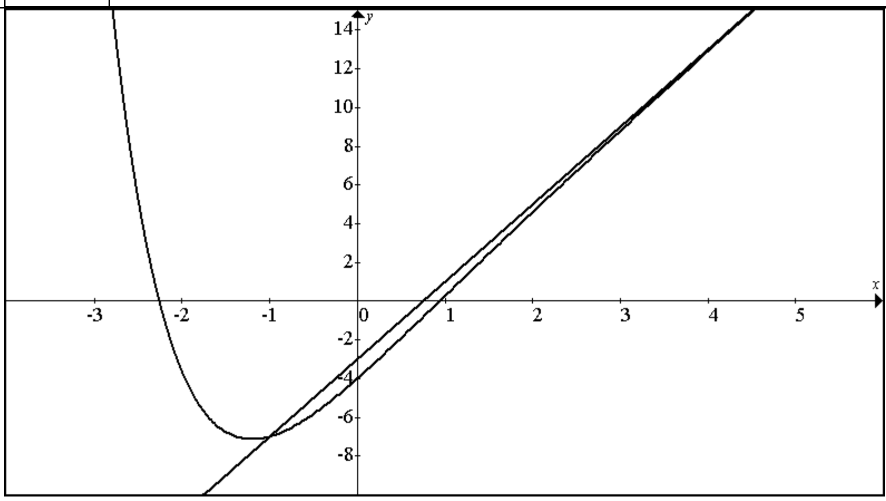
5) Tracer (D) et (G).

Q_I	Corrigé	Note
1a	$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z'=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.	0.5
1b	$\left\lvert\frac{z'}{z}\right\rvert=2$ $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.	0.5
1c	OM= $\lvert z\rvert=2$; OM'= $\lvert z'\rvert=4$; $MM'=\lvert z-z'\rvert=\lvert-2\sqrt{3}+2i-2i\rvert=2\sqrt{3}$. $OM'^2=OM^2+MM'^2$. ***OU*** $z'=(1+i\sqrt{3})2i=-2\sqrt{3}+2i$ M et M' ont même ordonnée et M $\in$ y'y, donc OMM' est rectangle en M	1
2a	$(1+i)^3=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $(1+i)^3=-2+2i$	0.5
2b	<u>Forme exponentielle</u>: $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)^3=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)}=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$. <u>Forme algébrique:</u> $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(2i-2\right)=2\left(-1-\sqrt{3}\right)+2\left(1-\sqrt{3}\right)i$	0.5
2c	En comparant les formes exponentielle et algébrique de z': $4\sqrt{2}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2\left(-1-\sqrt{3}\right)$, Par suite $\cos\frac{13\pi}{12}=\frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$	1

Q_{II}	Corrigé	Note
A1a	$p(K)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $p(L)=\frac{2}{3}$	0.5
A1b	$p(E\cap K)=p(K)\times p(E/K)=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{1}{5}.$	0.5
A1c	$p(E\cap L)=p(L)\times p(E/L)=\frac{2}{3}\times\frac{C_1^1\times C_4^1}{C_5^2}=\frac{4}{15}.$ $p(E)=p(E\cap K)+p(E\cap L)=\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}.$	1
A2	$p(K/E)=\frac{p(E\cap K)}{p(E)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{7}.$	0.5
B	Le nombre de cas possibles est $C_5^3=10$ $p(X=4)=p(0,\ 1,\ 4 \text{ ou } 0,\ 2,\ 4 \text{ ou } 1,\ 2,\ 4)=\frac{3}{10}$. $X=x_i$: 2 ; 4 ; 5 p_i : $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{6}{10}$	1.5

$X=x_i$	2	4	5
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

Q_{III}	Corrigé	Note
1a	2– 0 –2 = 0 et 1+ 0 –1= 0.	0.5
1b	(d): x = m+1; y=2m; z = 5m+1	0.5
2a	$(D):\ x=2t+1$; $y=-t$; $z=1$	0.5
2b	$\overrightarrow{AE}(2t,-t,0);\ AE=\sqrt{5t^2}=\sqrt{5}$, donc $t=\pm1$ Pour t = 1, E(3, –1,1).	0.5
3a	0 + 2 –2 = 0; 4 –2–2 = 0 donc B et C appartiennent à P.	0.5
3b	$\overrightarrow{AB}(-1,-2,-1)$; $\overrightarrow{BC}(2,4,t)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ donc $t=-10$ Aire de ABC = $\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{120}}{2}=6\sqrt{5}$ Volume de EABC = $\frac{\text{aire}(ABC)\times EA}{3}=\frac{6\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{3}=10u^3$. ***OU*** on calcule le produit mixte	1.5

<table>
<tr><th>QIV</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>f(x) = 0 pour x = α ; f(x) > 0 pour x > α ; f(x) < 0 pour x < α .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>u(x) = x et v'(x) = e^{-x}
$\int_0^2 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^2 = -3e^{-2}+1$ Aire =
$\int_0^2 4dx+\int_0^2 xe^{-x}dx = \left[4x\right]_0^2+\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^2 = (-3e^{-2}+9)\,u^2$.</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4xe^x-3e^x-x-1}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{e^x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} 4xe^x = 0.$
g(-2,5) =5,27.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4x-3-xe^{-x}-e^{-x}) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-(4x-3)) = \lim\limits_{x\to+\infty} -(x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}) = 0$
donc la droite d’équation y = 4x - 3 est une asymptote de (G).</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>g(x) - (4x-3) = - (x+1) e^{-x}
(G) coupe (D) pour x = –1 ; donc A(–1 ; –7)
Si x < -1, - (x+1) e^{-x} > 0 , alors (G) est au-dessus de (D)
Si x > -1, - (x+1) e^{-x} < 0 , alors (G) est au-dessous de (D)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>B4a</td><td>g'(x) = 4 - e^{-x} + (x+1) e^{-x} = 4 + x e^{-x} = f(x)</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>B4b</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1,2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>g'(x)</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>g(x)</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>-7,1</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>B5</td><td>
</td><td>1.5</td></tr>
</table>