وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	دورة سنة 2009 العادية
عدد المسائل : ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات

يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Écrire le numéro de chaque question et donner, ***en justifiant***, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c	Réponses d
1	t et m sont deux réels ; $(d):\begin{cases}x=-5t\\y=t-1\\z=t+1\end{cases}$ et $(d'):\begin{cases}x=10m\\y=8m\\z=-7m+8\end{cases}$ Les droites (d) et (d') sont :	confondues	concourantes	parallèles	non coplanaires
2	La solution de l'équation différentielle : $Y'' + 4Y' + 4Y = 0$ vérifiant $Y'(0) = Y(0) = 1$ est :	$(2x+1)e^{2x}$	$(-3x+1)e^{-2x}$	$(3x+1)e^{-2x}$	$(-x+1)e^{2x}$
3	Une solution de l'équation $\cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est :	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	1	2	-1
4	$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $-1 < x < 1$. Une primitive H de h est :	$\arccos(x-1)$	$\arcsin(1-x)$	$\arcsin(1-x^2)$	$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
5	La partie imaginaire de z tel que : $\left\lvert\frac{z-2i}{z+i}\right\rvert = 1$ est :	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	-2

II- (2 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

On considère les points A(4 ; 3 ; 2) , B(–8 ; –1 ; 6) et le plan (P) d'équation x – y – z + 4 = 0.

1) a- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

b- Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (AB) avec (P).

c- Montrer que A et B sont situés de part et d'autre du plan (P).

2) Soit (d) l'ensemble des points de (P) qui sont équidistants de A et B .

a-Trouver une équation du plan médiateur (Q) de [AB].

b- Montrer que (d) est la droite définie par le système d'équations paramétriques :

$x = m - \frac{3}{2}$; $y = -m - 1$; $z = 2m + \frac{7}{2}$. (m est un réel)

3) Soit J le projeté orthogonal de A sur (d) .

Calculer les coordonnées de J et montrer que (d) est perpendiculaire au plan (ABJ).

III- (3 points)

Une équipe de football propose, à ses supporters, des abonnements saisonniers pour 6, 8 ou 10 matchs.

Parmi les supporters qui ont pris un abonnement, on constate que :

▫ 45 % ont choisi l'abonnement pour 6 matchs,

▫ 35 % ont choisi l'abonnement pour 8 matchs,

▫ le reste a choisi l'abonnement pour10 matchs.

On interroge au hasard un supporter ayant pris un abonnement.

1) L'abonnement pour 6 matchs coûte n LL, celui pour 8 matchs coûte (n + 4 000) LL, et celui pour 10 matchs coûte (n + 6 000) LL.

On désigne par Y la variable aléatoire égale à la somme dépensée par le supporter interrogé.

a- Calculer n pour que l'espérance mathématique de Y soit égale à 22 600.

b- Pour la valeur trouvée de n, représenter graphiquement la fonction de répartition de Y.

2) On sait que 85% des supporters qui ont pris un abonnement sont des garçons, et parmi ces garçons 40 % ont choisi l'abonnement pour 6 matchs.

On considère les évènements suivants :

G :« Le supporter interrogé est un garçon».

A :« Le supporter interrogé a choisi l'abonnement pour 6 matchs».

a- Vérifier que la probabilité $P(G\cap A)$ est égale à 0 ,34 puis calculer la probabilité $P(G\cap \overline{A})$.

b- Calculer P(G/A).

IV- (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$, on associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z) = z^2 - (4+5i)z + 7i - 1$.

1) a- Calculer les racines carrées du nombre complexe $-5+12i$.
   b- Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
   Montrer que $x' = x^2 - y^2 - 4x + 5y - 1$ et $y' = 2xy - 5x - 4y + 7$.

3) Montrer que lorsque M varie sur la droite d'équation $y = x$, M' varie sur une parabole (P) dont on déterminera le paramètre, le foyer et la directrice .

4) a- Montrer que lorsque M' varie sur l'axe des ordonnées , le point M varie sur une hyperbole (H) dont on déterminera une équation , les asymptotes et les sommets. Tracer (H).
   b- Soit $L(1\ ;\ 1)$ un point de (H). Ecrire une équation de la tangente en L à (H).

V- (3 points)

ABCD est un carré de côté 2 et de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. E et F sont les milieux respectifs de [AB] et [BC] et G est le milieu de [BF].

Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et D en E.

1) Calculer un angle et le rapport de S.

2) Vérifier que S(B) = F et déterminer S(E).

3) Soit h = SoS.
   a- Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport.
   b- Démontrer que le centre I de S est le point d'intersection de (AF) et (DG).
   c- Déterminer l'image par S du carré ABCD et en déduire la nature du triangle OIC.

4) Soit (A_n) la suite des points définie par : $A_0 = A$ et $A_{n+1} = S(A_n)$ pour tout entier naturel n.
   a- On pose $L_n = A_nA_{n+1}$ pour tout n. Prouver que (L_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   Calculer $S_n = L_0 + L_1 + \ldots\ldots\ldots + L_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
   b-Calculer $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA_n}\right)$ en fonction de n et démontrer que si n est pair, alors les points I, A et A_n sont alignés.

VI- (7 points)

On considère la fonction h définie sur IR par : $h(x) = e^{2x} + 2e^{x} - 2$.

A –

1) a- Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

2) a- Dresser le tableau de variations de h.

b- Tracer la courbe représentative (H) de h dans un repère orthonormé.

c- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (H) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B –

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \dfrac{e^{2x}+2}{e^{x}+1}$ et f la fonction donnée par $f(x) = \ln(g(x))$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un nouveau repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. (unité graphique : 2 cm)

1) a-Montrer que f est définie pour tout réel x.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et en déduire une asymptote (d) à (C).

2) a- Montrer que $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right)$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et démontrer que la droite (d') d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

c- Etudier suivant les valeurs de x la position relative de (C) et (d').

3) a- Montrer que $g'(x) = \dfrac{e^{x}\left(h(x)\right)}{\left(e^{x}+1\right)^2}$.

b- Montrer que $f'(x)$ et $h(x)$ ont même signe et dresser le tableau de variations de f.

c- Trouver l'abscisse du point de la courbe (C) où la tangente à (C) est parallèle à (d').

4) Tracer (d), (d') et (C).

C –

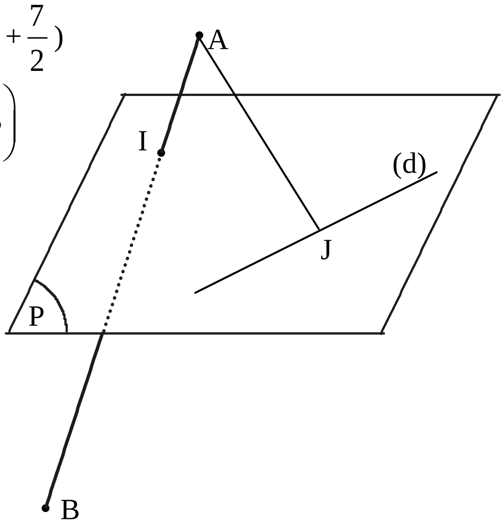
On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$;
(C') est la courbe représentative de f^{-1}.

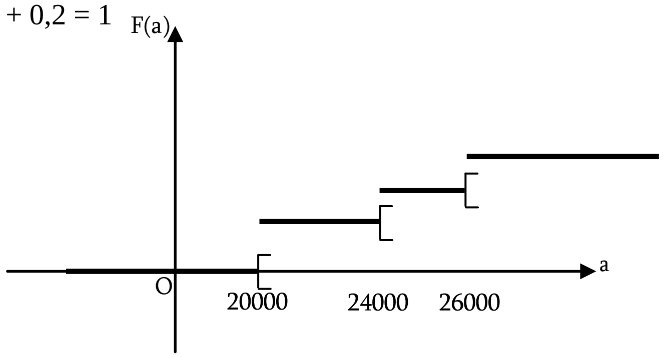
1) Tracer (C') dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

2) Ecrire une équation de la tangente à (C') au point d'abscisse ln2.

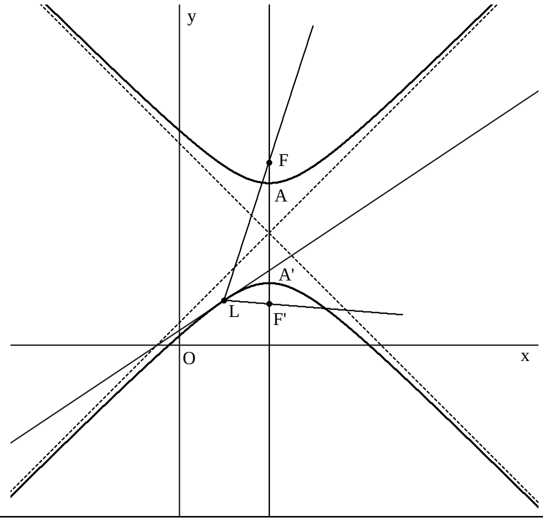
دورة سنة 2009 العادية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
	مسابقة في مادة الرياضيات	**مشروع معيار التصحيح**

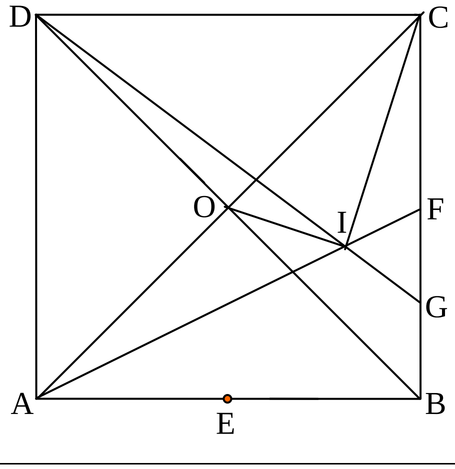
Q_1	Corrigé	Note
1	(d) et (d') ne sont ni parallèles ni confondues Le système $-5t = 10m$; $t - 1 = 8m$ et $t + 1 = -7n + 8$ n'a pas de solution à savoir : $-5t = 10m$ et $t = 8m + 1$ donne $t = 1/5$ et $m = -1/10$ avec $t + 1 = 6/5$ et $-7m + 8 = 87/10$. ***d***	1
2	L'équation caractéristique est $(r + 2)^2 = 0$; $Y= (ax + b)e^{-2x}$ On a $Y(0) = Y'(0) = 1$ D'où $a = 3$ et $b =1$. ***c***	0.5
3	$\cos(\arcsin \frac{1}{x}) = \frac{+\sqrt{3}}{2}$ est vérifiée uniquement pour $x = 2$. ***c***	1
4	Les dérivées des trois premières fonctions sont respectivement différentes de h(x). ***d***	1
5	$z_A= 2i$ et $z_B= -i$; $\left\lvert \frac{z-z_A}{z-z_B} \right\rvert = 1$. Par suite AM = BM et M appartient à la médiatrice de [AB] : y = ½ .Donc Im(z) = ½ . ***a***	0.5

Q_{II}	Corrigé	Note
1a	$(AB)\ :\ x = 3t + 4\ ;\ y = t + 3\ ;\ z = -t + 2$.	0.5
1b	$(AB) \cap (P) = \{ I(1\,;\,2\,;3) \}$.	0.5
1c	$\overrightarrow{IA}(3\,;1\,;-1)$ et $\overrightarrow{IB}(-9\,;-3\,;3)$; alors $\overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IA}$; A et B sont de part et d'autre par rapport au plan (P).	0.5
2a	$MA^2 = MB^2$ équivaut à $3x + y - z + 9 = 0$.	0.5
2b	(d)$\subset$(P) et (d) $\subset$(Q) alors (d) = (P)$\cap$(Q). D'où (d) : $x = m - \frac{3}{2}$; $y = -m - 1$; $z = 2m + \frac{7}{2}$. ***OU :*** On montre que la droite donnée est respectivement incluse dans (P) et (Q). .	0.5
3	J est un point de (d) ; J($m - \frac{3}{2}$; $-m - 1$; $2m + \frac{7}{2}$) $\vec{AJ}\cdot\vec{V}_d = 0$ donne $m = -\frac{1}{4}$ et $J\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, 3\right)$ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AJ} = 11\vec{i} - 11\vec{j} + 22\vec{k}$ il est parallèle à (d). par suite (d) est perpendiculaire à (ABJ). ***OU*** $(AB) \perp (Q)$ et $(d) \subset (Q)$; alors $(d) \perp (AB)$. De plus $(d) \perp (AJ)$. D'où $(d) \perp (ABJ)$ 	1.5

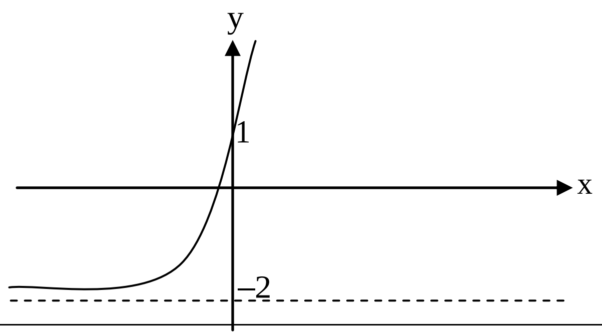
Q_{III}	**Corrigé**	**Note**
1a	E(Y) = 0,45n + 0,35(n + 4000) + 0,2(n + 6000) = 22600 ; n = 20 000	1
1b	Pour tout réel a on a F(a) = P(Y$\leq$ a) ♦a < 20 000 ; F(a) = 0 ♦20 000$\leq$ a < 24 000 ; F(a) = 0,45 ♦24 000$\leq$ a < 26 000 ; F(a) = 0,45 + 0,35 = 0,8 ♦26 000 $\leq$ a ; F(a) = 0,8 + 0,2 = 1  	2
2a	P(G$\cap$A) = P(A/G) × p(G) = 0,4 × 0,85 = 0,34. P(G) = P(G$\cap$A) + P(G$\cap \overline{A}$) ; 0,85 = 0,34 + P(G$\cap \overline{A}$) ; P(G$\cap \overline{A}$) = 0 ,51.	2
2b	P(G/A) = $\dfrac{P(G\cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}34}{0{,}45} = \dfrac{34}{45}$	1

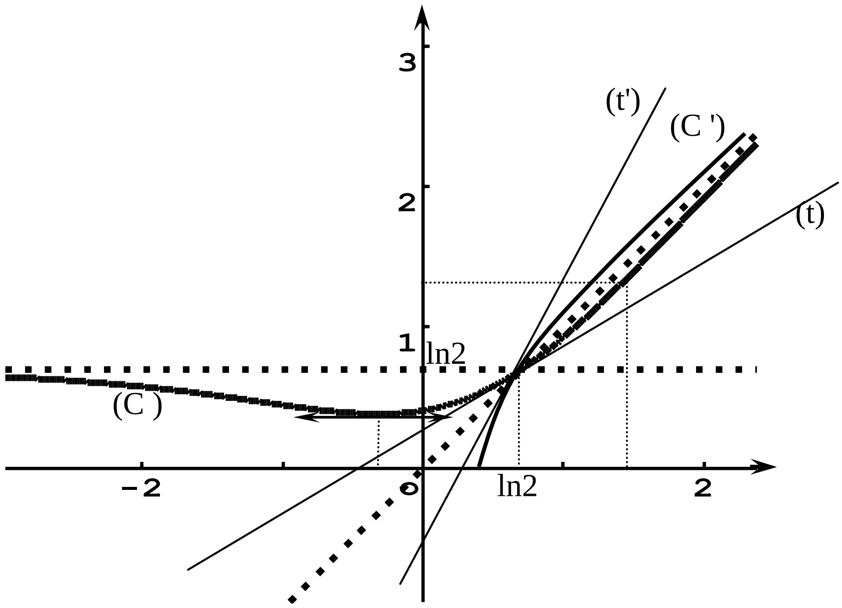
Q_{IV}	**Corrigé**	**Note**
1a	$-5+12\,i=(2+3i)^2$; les racines carrées sont $2+3i$ et $-2-3i$.	0.5
1b	$\Delta=-5+12i$; $z'=1+i$ et $z''=3+4i$.	0.5
2	$x'=x^2-y^2-4x+5y-1$, $y'=2xy-4y-5x+7$.	0.5
3	$y=x$ donne $x'=x-1$ et $y'=2x^2-9x+7$. D'où $y'=2x'^2-5x'$. Le point M' varie sur la parabole (P) d'équation $y=2(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{8}$. Paramètre : $p=\frac{1}{4}$, Axe focal : $x=\frac{5}{4}$; Foyer $\left(\frac{5}{4};-3\right)$, Directrice: $y=-\frac{13}{4}$.	1.5
4a	$x'=0$ donne $x^2-y^2-4x+5y-1=0$. Le point M' varie sur l'hyperbole (H) d'équation $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-(x-2)^2=\frac{5}{4}$. $A\left(2;\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}\right)$ $A'\left(2;-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}\right)$ $y=x+\frac{1}{2}$ $y=-x+\frac{9}{2}$	2

		
4b	Une équation de la tangente est $\left(y-\frac{5}{2}\right)\left(y_L-\frac{5}{2}\right)-(x-2)(x_L-2)=\frac{5}{4}$; $2x-3y+1=0$.	1

Q_V	**Corrigé**	**Note**
1	S(A) = B et S(D) = E donc l'angle de S est $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et le rapport de S est $\frac{EB}{AD}=\frac{1}{2}$	0.5
2	S(B) = F car $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BF}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et BF =½ AB S(A)=B et S(B)=F et E milieu de $[AB]$ donc S(E) est le milieu de $[BF]$ d'où S(E)=G 	1
3a	h est la similitude de centre I , d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ et de rapport ½× ½ = ¼ . C'est donc l'homothétie négative de centre I et de rapport -¼	0.5
3b	h (A) = SoS(A) = S(B) = F donc I∈ (AF) et h(D) = SoS(D) = S(E) = G donc I∈ (DG) d'où I est l'intersection de (AF) et (DG).	0.5
3c	L'image par S du carré ABCD est le carré BFOE car S(A) = B , S(B) = E et S(D) = E	1

	Donc l'image de C par S est O par suite $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IO}\right)=\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ et le triangle OIC est rectangle en I.	
4a	$L_{n-1}=A_{n-1}A_n$ et $S(A_{n-1})=A_n$ et $S(A_n)=A_{n+1}$ d'où $A_nA_{n+1}=½\,A_{n-1}A_n$ donc $L_n=½L_{n-1}$ et (L_n) est une suite géométrique de raison q=½ et dont le premier terme est $L_0=A_0A_1=AB=2$. $S_n=l_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\times\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}}=4\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=4$	1.5
4b	$\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA_n}\right)=\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA_1}\right)+\left(\overrightarrow{IA_1},\overrightarrow{IA_2}\right)+\dots\dots\dots\dots+\left(\overrightarrow{IA_{n-1}},\overrightarrow{IA_n}\right)=\dfrac{n\pi}{2}[2\pi]$. Si n est pair , alors $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IA_n}\right)=k\pi$ donc $A_n\in(IA)$.	1

Q_{VI}	**Corrigé**	**Note**
A1a	$e^{2x}+2e^x-2=0$ $e^x=-1-\sqrt{3}$ ou $e^x=-1+\sqrt{3}; x=\ln(-1+\sqrt{3})\approx-0,312$	0.5
A1b	$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-2$	0.5
A2a	$h'(x)=2e^{2x}+2e^x$. $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline h'(x) & & + & \\ \hline h(x) & -2 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1
A2b	La droite d'équation y = – 2 est asymptote lorsque x $\to-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=+\infty$ d'où l'axe des ordonnées est une direction asymptotique.  	1
A2c	$A=\int_0^1(e^{2x}+2e^x-2)dx=[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-2x]_0^1$ $=\dfrac{1}{2}e^2+2e-\dfrac{9}{2}=4,63u^2$.	1
B1a	$g(x)=\dfrac{e^{2x}+2}{e^x+1}>0$ quel que soit x; Alors f est définie, quel que soit x	0.5
B1b	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\dfrac{e^{2x}+2}{e^x+1})=\ln2$; (d) : y = ln2 asymptote.	1
B2a	$x+\ln\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\ln e^x+\ln\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\ln\dfrac{e^x(1+2e^{-2x})}{1+e^{-x}}$ $=\ln(g(x))=f(x)$	0.5
B2b	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ D'où (d') : y = x est une asymptote à (C) lorsque x tend vers + ∞	1

B2c	$f(x) - x = \ln\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}}$. $\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}} = 1 \Leftrightarrow x = \ln 2$; (C) rencontre (d') au point (ln2 ; ln2). $\dfrac{1+2e^{-2x}}{1+e^{-x}} \succ 1 \Leftrightarrow x \prec \ln 2$; (C) est au-dessus de (d').	1
B3a	$g'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{x}+1) - e^{x}(e^{2x}+2)}{(e^{x}+1)^2} = \dfrac{e^{x}h(x)}{(e^{x}+1)^2}$.	0.5
B3b	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{e^{x}\left(h(x)\right)}{(e^{x}+1)(e^{2x}+2)}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -0{,}31 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \ln 2 & \searrow & 0{,}38 & \nearrow & +\infty \end{array}$ f '(x) a le même signe que h(x) * Le minimum : $\approx$ ln(1,46) $\approx$ 0,38	1.5
B3c	f '(x) = 1 équivaut à $e^{2x} - 4e^{x} - 2 = 0$;D'où : x= ln ($\sqrt{6}$ + 2) .	1
B4		1.5
C1	La courbe (C') est la symétrique de la partie de (C) correspondante à $0 \le x$; par rapport à la première bissectrice des axes. *** ***Tracé*** ***	0.5
C2	(C') coupe (C) au point (ln2 ; ln2). $f^{-1}(\ln 2) = \dfrac{1}{f'(\ln 2)} = \dfrac{3}{2}$. $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{\ln 2}{2}$.	1