وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٢ العادية
عدد المسائل: أربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I- **(4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$, on donne les points suivants :
A (4 ;0 ; 1) , B(2 ;1 ;2), C(2 ; 0 ;3) et E(3 ; –1 ;0).

1) a- Ecrire une équation du plan (P) déterminé par A, B et C.
   b- Montrer que A est le projeté orthogonal de E sur (P).
2) a- Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b- Calculer l'aire du triangle ABC.
   c- Calculer le volume du tétraèdre EABC.
3) On désigne par (Q) le plan d'équation $x - 2y - 2z - 2 = 0$.
   Montrer que (Q) passe par A et qu'il est perpendiculaire à la droite (BE).
4) a- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (BC).
   b- Soit M un point variable de (BC). Démontrer que, lorsque M décrit (BC), la distance de M au plan (Q) reste constante.

II- (4 points)

Un magasin vend des écouteurs de deux genres différents E_1 et E_2 et des batteries de trois genres différents B_1, B_2 et B_3.
Pendant la période des soldes, certains articles sont placés dans deux paniers U et V.
Le Panier U contient 15 écouteurs E_1 et 5 écouteurs E_2;
le Panier V contient 8 batteries B_1, 10 batteries B_2 et 7 batteries B_3.
A-Un client choisit au hasard un article de chaque panier.

1) Démontrer que la probabilité de choisir un écouteur E_1 et une batterie B_1 est égale à $\frac{6}{25}$.
2) Calculer la probabilité qu'un écouteur E_1 soit parmi les deux articles choisis.
3) Le magasin affiche les prix suivants:

Article	Ecouteur E_1	Ecouteur E_2	Batterie B_1	Batterie B_2	Batterie B_3
Prix en LL	**40 000**	**15 000**	**30 000**	**25 000**	**50 000**

Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée par le client pour l'achat des deux articles choisis.

   a- Démontrer que la probabilité $P(X = 65\ 000)$ est égale à $\frac{37}{100}$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de X.

B-Dans cette question, un client choisit au hasard un écouteur du panier U et choisit simultanément et au hasard deux batteries du panier V. Calculer la probabilité qu'il paie une somme inférieure ou égale à 70 000LL.

III- (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point M d'affixe z ($z \neq 0$), on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{2}{\bar{z}}$.

1) Soit $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$), écrire z' sous forme exponentielle.

2) a- Montrer que $OM \times OM' = 2$.

b- Démontrer que si $z = z'$, alors M se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

3) On pose $z = 1 + iy$ où y est un réel.

a- Montrer que $|z' - 1| = 1$.

b- Montrer que lorsque y varie, M' se déplace sur un cercle (C') dont on déterminera le centre et le rayon.

IV-(8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et calculer $f(-2)$.

b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2) Montrer que $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) La droite (d) d'équation $y = x$ coupe (C) en un point d'abscisse α.

Vérifier que $1,4 < \alpha < 1,5$.

4) Tracer (d) et (C).

5) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (px^2 + qx + r)\, e^{-x}$.

a- Calculer p, q et r pour que la fonction F soit une primitive de f.

b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l’axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

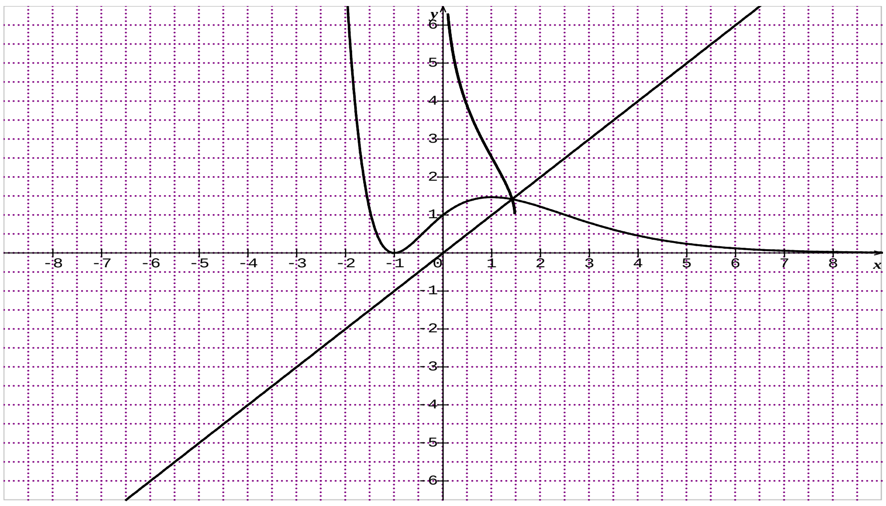
6) La fonction f admet sur $[1; +\infty[$ une fonction réciproque h. Préciser le domaine de définition de h et tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C).

I-	Corrigé	Note
1a	Pour tout point M(x; y ; z) de (P) ; $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ (P): $x+y+z-5=0$,	0.5
1b	$\overrightarrow{AE}(-1,-1,-1)$, $\overrightarrow{N}_P(1,1,1)$ d'où $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{NP}$. (AE) est perpendiculaire à (P) et $A\in(P)$ donc A est le projeté orthogonal de E sur (P).	0.5
2a	$\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$, $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ donc ABC est rectangle en B.	0.5
2b	Aire (ABC) = $\frac{1}{2}AB\times BC$ = $\frac{1}{2}\sqrt{6\times2}$ = $\sqrt{3}\,u^2$	0.5
2c	$V=\dfrac{\text{Aire(ABC)}\times AE}{3}=1\,u^3$. OU : On calcule le produit mixte.	0.5
3	Les coordonnées de A vérifient l'équation de (Q): 4 – 0 –2 –2 = 0. $\overrightarrow{BE}(1,-2,-2)$ et $\overrightarrow{N}_Q(1;-2;-2)$ donc (Q) passe par A et est perpendiculaire à(BE).	0.5
4a	$\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$, $(BC): x=2;\ y=-m+1;\ z=m+2\ ; m\in\mathbb{R}$.	0.5
4b	d (M →(Q)) = $\dfrac{\lvert 2+2m-2-2m-4-2\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=2$.	0.5

<table>
<tr><th>II-</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>$P\,(E_1, B_1) = \frac{15}{20} \times \frac{8}{25} = \frac{120}{500} = \frac{6}{25}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>$P\,(E_1, B) = \frac{15}{20} \times 1 = \frac{3}{4}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A3a</td><td>$P(X = 65000) = P(E_1, B_2) + P(E_2, B_3)$
$= \frac{15}{20} \times \frac{10}{25} + \frac{5}{20} \times \frac{7}{25} = \frac{37}{100}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A3b</td><td><table>
<tr><td>x_i</td><td>40000</td><td>45000</td><td>65000</td><td>70000</td><td>90000</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\frac{1}{10}$</td><td>$\frac{2}{25}$</td><td>$\frac{37}{100}$</td><td>$\frac{6}{25}$</td><td>$\frac{21}{100}$</td></tr>
</table></td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Pour payer une somme inférieure ou égale à 70000LL. on ne peut pas choisir E_1 car 2 batteries valent au moins 50000LL ; donc on choisit $\{E_2, B_2, B_2\}$ ou $\{E_2, B_1, B_2\}$
$P(S \leq 70000) = \frac{5}{20} \times \frac{C_{10}^{2} + C_{8}^{1} \times C_{10}^{1}}{C_{25}^{2}} = \frac{5}{48}$.</td><td>1</td></tr>
</table>

III	Corrigé	Note
1	$z' = \dfrac{2}{re^{-i\theta}} = \dfrac{2}{r}e^{i\theta}$.	0.5
2a	$OM \times OM' = r \times \dfrac{2}{r} = 2$. Ou : $\lvert z' \rvert = \left\lvert \dfrac{2}{\bar{z}} \right\rvert = \dfrac{2}{\lvert z \rvert}$ donc $OM' = \dfrac{2}{OM}$.	0.5
2b	Si $z = z'$ alors $OM^2 = 2$; $OM = \sqrt{2}$. M appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.	1
3a	$\lvert z'-1 \rvert = \left\lvert \dfrac{2}{1-iy} - 1 \right\rvert = \left\lvert \dfrac{1+iy}{1-iy} \right\rvert = \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = 1$.	1
3b	Soit I le point d'affixe 1. IM' = 1. Donc M' appartient au cercle (C') de centre I (1 ; 0) et de rayon 1.	1

IV	Corrigé	Note
1a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2\, e^{-x} = +\infty$; f (– 2) = 7,4.	0.5
1b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2(x+1)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0.$ L’axe des abscisses est asymptote à (C).	0.5
2	$f'(x) = 2(x + 1)\, e^{-x} - e^{-x}(x + 1)^2 = (1 - x^2)\, e^{-x}$. $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & \frac{4}{e} & \searrow & 0 \end{array}$	1.5
3	f(1,4) = 1,42 > 1,4 ; f(1,5) = 1,39 < 1,5 donc 1,4 < α < 1,5.	1

4		1.5
5a	F'(x) = f(x) par suite, $-p\,x^2 + (2p - q)\,x + q - r = x^2 + 2x + 1$ pour tout réel x. Donc , $p = -1$, $q = -4$, $r = -5$.	1
5b	Aire = $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[(-x^2 - 4x - 5)e^{-x}\right]_0^1$ $= 5 - \frac{10}{e} = 1{,}321\ u^2$.	1
6	$D_h = \left]0;\frac{4}{e}\right]$, C_h est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x.	1