وزارة التربية والتعليم العالي **المديرية العامة للتربية** **دائرة الامتحانات**	**امتحانات الشهادة الثانوية العامة** **الفرع : علوم عامة**	**دورة سنة ٢٠١٢ العادية**
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	**الاسم:** **الرقم:**

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات

- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Écrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

№	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c	Réponses d
1	Si $z = re^{i\frac{5\pi}{6}}$ $(r > 0)$ et $z' = z(z - \overline{z})$, alors la forme exponentielle de z' est :	$r^2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$r^2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$re^{i\frac{2\pi}{3}}$	$re^{-i\frac{2\pi}{3}}$
2	Si f est la fonction définie sur R par $f(x) = xe^x$, alors la dérivée d'ordre n de f est :	$(x + 2n - 1)e^x$	$(x + n + 1)e^x$	$(x - n)e^x$	$(x + n)e^x$
3	Si $g(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$, alors le domaine de définition de g est :	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1 ; 1]$	$[0 ; 1]$	$[1;+\infty[$
4	n est un entier strictement positif. Si $U_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$, alors $U_{n+1} + U_n =$	$\frac{e^n - 1}{n}$	$ne^n - 1$	$e^n - 1$	$\frac{e^n}{n}$

II- (2 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(3 ; 1 ; 1) , B(2 ; 0 ; 3) et C(1 ; 2 ; 2) .

1) Ecrire une équation du plan (P) déterminé par les points A, B et C.

2) a- Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

b- G (2 ; 1 ; 2) est le centre du cercle (γ) circonscrit au triangle ABC.

Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (T) tangente en A au cercle (γ) .

3) a- Calculer l'aire du triangle ABC.

b- Soit M(1; 7 ; α) . Calculer α dans le cas où le volume du tétraèdre ABCM est égal à 3.

III- (3 points)

Dans une population donnée, 15% des individus sont atteints d'une maladie M_a.

Parmi les individus atteints de la maladie M_a , 20% sont atteints d'une autre maladie M_b.

Parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 90% ne sont pas atteints de la maladie M_b.

On choisit au hasard un individu de cette population et on considère les événements suivants :

A: «L'individu choisi est atteint de la maladie M_a»

B: «L'individu choisi est atteint de la maladie M_b».

1) Calculer la probabilité $P(A\cap B)$ et démontrer que P(B) = 0,115.

2) Un individu de la population déclare qu'il n'est pas atteint de la maladie M_b.
Calculer la probabilité qu'il soit atteint de la maladie M_a.

3) On choisit au hasard un individu de cette population et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de maladies déjà citées dont cet individu pourrait être atteint.

Déterminer la loi de probabilité de X.

4) On suppose dans cette question que cette population compte 200 individus. On choisit au hasard un groupe de 4 individus de cette population. Calculer la probabilité que parmi les 4 individus choisis, il y ait au plus 2 individus atteints de la maladie M_a.

IV- (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère la parabole (P) de sommet S (–2 ; 0) et de foyer $F\left(-\frac{7}{4};0\right)$.

1) a- Démontrer qu'une équation de (P) est $y^2 = x + 2$.

b- Tracer (P).

2) a- Soit E(2 ; 2) un point de (P). Ecrire une équation de la tangente (T) à (P) en E.

b- Soit (D) le domaine limité par l'axe des abscisses, la parabole (P) et la droite (T).

Démontrer que l'aire de (D) est inférieure à 8.

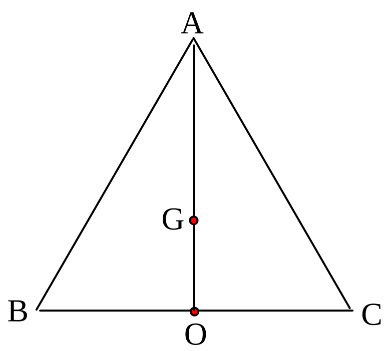
3) La droite (L) d'équation y = mx où m est un réel non nul, coupe (P) en deux points A et B.

Montrer que le milieu I de [AB] décrit une parabole (P′) dont on déterminera le foyer et la directrice.

V- (3 points)

On considère un triangle équilatéral direct ABC de centre G. On désigne par O le milieu de [BC] et par F celui de [AC].

Soit S la similitude qui transforme A en B et G en C.



A-

1) a- Déterminer le rapport et un angle de S.

b- Démontrer que F est le centre de S.

2) a- Déterminer la droite (d) image de (AB) par S.

b- Construire le point D image de B par S.

B-

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que : $z_A = i\sqrt{3}$ et $z_C = 1$.

1) a- Donner la forme complexe de S.

b- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S$.

c- Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{FA}$.

2) On désigne par (E) l'ellipse de centre O et de sommets B, C et G. Soit (E') l'image de (E) par S.

a- Déterminer le centre et l'axe focal de l'ellipse (E').

b- Calculer l'aire du domaine limité par (E').

VI- (7 points)

A- On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y + xy' = e^x\quad (x \neq 0)$.

On pose z = xy.

1) Former une équation différentielle (E') satisfaite par z.

2) Résoudre l'équation (E') et déduire la solution générale de (E).

3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation y = x.

B- Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1) a- Vérifier que $h'(x) = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$.

b- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = (x-1)e^x$.

Dresser le tableau de variations de g et déduire que h'(x) > 0.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$.

. b- Dresser le tableau de variations de h.

3) a- Ecrire une équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse 1.

b- Tracer (Δ) et (C).

4) a- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et donner le domaine de définition de h^{-1}.

b- Calculer $(h^{-1})'(e-1)$.

C- On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = h(x) + \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le même repère que (C).

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α et vérifier que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

b- Comparer $h(\alpha)$ et h(1). En déduire que $\ln\alpha > 1 - e$.

3) a- Etudier , suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (Γ).

b- Tracer (Γ).

4) Soit A et B deux points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (Γ).

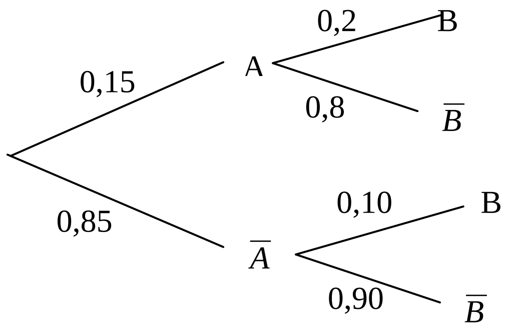
Montrer que, pour tout réel m > 0 tel que AB = m, il existe deux valeurs de x dont le produit est indépendant de m.

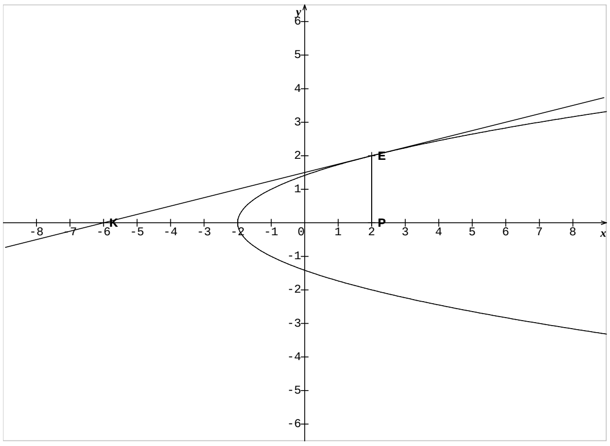
5) Pour 0 < t < 1, calculer l'aire S(t) du domaine limité par (C), (Γ) et les deux droites d'équations x = t et x = e. Trouver $\lim\limits_{t\to 0} S(t)$.

SG- SESSION ORDINAIRE 2012-MATH

I	Corrigé		Note
1	$z' = r\,e^{i\frac{5\pi}{6}}(2i\,I_m(z)) = r^2\,e^{i(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} = r^2\,e^{i\frac{8\pi}{6}} = r^2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	**a**	1
2	$f(x) = xe^x$; $f'(x) = (x + 1)e^x$ et $f''(x) = (x + 2)e^x$	**d**	1
3	g est définie pour $-1 \le 2x^2 - 1 \le 1$; $0 \le x^2 \le 1$; $-1 \le x \le 1$	**b**	1
4	$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 e^{nx}dx = \frac{1}{n}\left[e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$	**a**	1

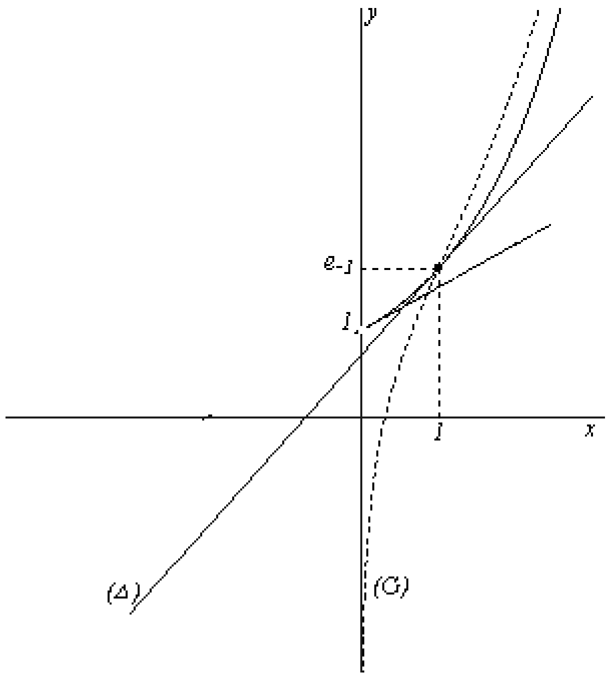
II	Corrigé	Note
1	Une équation de (P) est donnée par $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; (P) : $x + y + z - 5 = 0$.	0.5
2a	$AB = BC = CA = \sqrt{6}$. ABC est équilatéral.	0.5
2b	Soit $\vec{V}$ un vecteur directeur de (T). (T) est contenue dans (P) et (T) est perpendiculaire à (GA) ; $\vec{V}$ est colinéaire au vecteur $\vec{N}_P \wedge \overrightarrow{GA}$ avec $\vec{N}_P \wedge \overrightarrow{GA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ (T) : $x = t + 3$, $y = -2t + 1$, $z = t + 1$ où t est un paramètre réel.	1.5
3a	$S_{ABC} = \frac{1}{2}\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \rVert = \frac{1}{2}\sqrt{9+9+9} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. OU $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2}\sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.	0.5
3b	$d(M \longrightarrow (P)) = \frac{\lvert 1+7+\alpha-5 \rvert}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\lvert \alpha+3 \rvert}{\sqrt{3}}$ Volume $= \frac{1}{3} \times d(M \longrightarrow (P)) \times S_{ABC} = \frac{\lvert \alpha+3 \rvert}{2}$ $\lvert \alpha + 3 \rvert = 6$ pour $\alpha + 3 = 6$ ou $\alpha + 3 = -6$; $\alpha = 3$ ou $\alpha = -9$.	1

<table>
<tr><th>III</th><th>Corrigé</th><th>Note</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>P(A∩B) = P(A) × P(B/A) = 0,15 × 0,2 = 0,03.
P(B) = P(A∩B) + P($\overline{A}$ ∩ B) = 0,03 +P($\overline{A}$) × P(B/ $\overline{A}$) = 0,03 + 0,85×0,1 = 0,115</td><td>1`</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P\left(A/\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{P(A)\times P(\overline{B}/A)}{1-P(B)}=\dfrac{0,12}{0,885}=\dfrac{120}{885}=\dfrac{24}{177}=\dfrac{8}{59}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Les valeurs possibles de X sont : 0, 1 et 2.
$P\left(X=0\right)=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\times P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=0,85\times0,90=0,765$
$P\left(X=1\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=0,15\times0,8+0,85\times0,1=0,12+0,085=0.205$
$P\left(X=2\right)=P\left(A\cap B\right)=0,03$
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>P_i</td><td>0,765</td><td>0,205</td><td>0,030</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td>4a</td><td>P(au plus 2) = P(0) + P(1) + P(2) = $\dfrac{C_{30}^{0}\times C_{170}^{4}+C_{30}^{1}\times C_{170}^{3}+C_{30}^{2}\times C_{170}^{2}}{C_{200}^{4}}$ = 0,988</td><td>2</td></tr>
</table>

IV	Corrigé	Note
1-a	$\overrightarrow{SH} = -\overrightarrow{SF}$; $x_H = -\frac{9}{4}$; la directrice (d) a pour équation $x + \frac{9}{4} = 0$ M(x ; y) est un point de (P) ssi d(M ⟶ F) = d(M ⟶ (d)) ; $(x + \frac{9}{4})^2 = (x + \frac{7}{4})^2 + y^2$ Donc $y^2 = x + 2$.	1
1-b		0.5
2-a	$2yy' = 1$; $y' = \frac{1}{2y}$; $(y_E)' = \frac{1}{4}$ (T) : $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2)$; $y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$	1
2-b	T coupe l'axe des abscisses au point K(– 6 ; 0). Aire (D) < Aire(triangle EKP) avec P = proj(E/x'x) ; Aire(D) < 8.	1.5
3	y=mx x_A et x_B sont les racines de l'équation : $m^2x^2 - x - 2 = 0$ $x_I = ½ (x_A + x_B) = \frac{1}{2m^2}$ et $y_I = mx_I$; $(y_I)^2 = m^2(x_I)^2$; $(y_I)^2 = \frac{1}{2}x_I$. I décrit la parabole (P') d'équation $y^2 = \frac{1}{2}x$ .F'$(\frac{1}{8};0)$ et (d'): $x = \frac{-1}{8}$	2

V	Corrigé	Note
A-1-a	$\frac{BC}{AG}=\frac{BC}{\frac{2}{3}AO}=\frac{BC}{\frac{2}{3}AB\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$, $\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.	0.5
A-1-b	S(G) = C et S(A) = B, d'où $\left(\overrightarrow{\Omega G};\overrightarrow{\Omega C}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$, $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc Ω est le point d'intersection autre que O des deux cercles de diamètres respectifs [AB] et [GC] car $\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$, c'est le point F.	1
A-2-a	S(A) = B , (d) = S(AB) passe par B et perpendiculaire à (AB).	0.5
A-2-b	S(B) = D et S(A) = B ; donc (BD) est perpendiculaire à (AB). S(F) = F et S(B) = D ; donc (FD) est perpendiculaire à (FB) ; d'où (FD) = (AC). F est l'intersection de (d) avec (AC).	1
B-1-a	S est de la forme z' = $\sqrt{3}$ iz + b avec S(A) = B ; – 1 = $\sqrt{3}$ i(i $\sqrt{3}$) + b Donc b = 2 z' = $\sqrt{3}$ iz + 2	0.5
B-1-b	S o S est la similitude de centre F et de rapport $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, donc S o S est l'homothétie négative de centre F et de rapport – 3.	0.5
B-1-c	S o S(A) = S(B) = D ; donc $\overrightarrow{FD}=-3\overrightarrow{FA}$.	0.5
B-2-a	z' = $\sqrt{3}$ iz + 2 $z_O = 0$; donc $z_{O'} = 2$ O : milieu de [BC] ; donc O' est le milieu de [DC'] : axe focal de (E') est la perpendiculaire en O' à (BC).	1
B-2-b	A(E) = π ab ; a = OB = OC = 1 et b = OG = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ A(E)= $\pi\frac{\sqrt{3}}{3}$ et A(E') = $k^2\times$ A(E)= $\pi\sqrt{3}$.	0.5

VI	Corrigé	Note
A1	$z' = y + xy' = e^x$.	0.5
A2	La solution générale de l’équation (E’) est $z = e^x + C$; $C \in IR$. La solution générale de l’équation (E) est $y = \dfrac{e^x + C}{x}$.	0.5
A3	$y' = \dfrac{xe^x - e^x - c}{x^2}$. $y'(1) = -c = 1$ donne $c = -1$. Par suite $y = \dfrac{e^x - 1}{x}$.	0.5
B1a	D’après ***A***3 , $h'(x) = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$.	0.5
B1b	$g(x) = (x-1)e^x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $g'(x) = x\,e^x$. g(x)> –1 donc $(x-1)e^x + 1 > 0$ donc $h'(x) > 0$ $\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & + & \\ \hline g(x) & & & +\infty \\ & -1 & \nearrow & \end{array}$	1
B2a	$\lim\limits_{x\to0} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = +\infty$	1
B2b	Pour tout $x > 0$, $g(x) > -1$. D’où $(x-1)e^x + 1 > 0$. $\begin{array}{c\|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline h'(x) & & + & \\ \hline h(x) & & & +\infty \\ & 1 & \nearrow & \end{array}$	0.5
B3a	y– (e–1) = 1(x–1) : y = x + e – 2	0.5

B3b		0.5

B4a	h est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; donc h admet une fonction réciproque h^{-1} definie sur $]1\,;+\infty[$.	0.5
B4b	$(h^{-1})'(e-1)=(h^{-1})'(h(1))=\dfrac{1}{h'(1)}=1$.	0.5
C1a	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0.5
C1b	Pour $x\in]0\,;+\infty[$, $f'(x)=h'(x)+\dfrac{1}{x}>0$. $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & & +\infty \\ & -\infty & \nearrow & \end{array}$	0.5
C2a	Sur $]0\,;+\infty[$, f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$. Donc l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α . De plus $f(0,3)\times f(0,4)\approx-0,038\times0,313<0$, donc $0,3<\alpha<0,4$.	1
C2b	h est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $\alpha<1$ donc $h(\alpha)<h(1)$; $\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}<e-1$; mais $\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=-\ln\alpha$; donc $\ln\alpha>1-e$.	1
C3a	$f(x)-h(x)=\ln x$. Si 0<x<1 , lnx<0 donc (Γ) est au-dessous de (C). Si x>1, lnx>0 donc (Γ) est au-dessous de (C). (C) et (Γ) se coupent en $(1\,;e-1)$	1
C3b	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$; (Γ) admet une direction asymptotique parallèle à y'y en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$; y'y est une asymptote à (Γ). Tracé en 3b	1
C4a	$AB=\lvert f(x)-g(x)\rvert=\lvert\ln x\rvert$; $AB=m$ est équivalente à $\lvert\ln x\rvert=m$; $\ln x=m$ or $\ln x=-m$. donc $x=e^{m}$ ou $x=e^{-m}$. $e^{m}\times e^{-m}=1$	1
C5	$S(t)=-\displaystyle\int_t^1\ln x\,dx+\int_1^e\ln x\,dx=-\left[x\ln x-x\right]_t^1+\left[x\ln x-x\right]_1^e=t\ln t-t+2$. $\lim\limits_{t\to 0} S(t)=2$.	1.5