المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: علوم الحياة نموذج رقم -٤- المدّة : ساعتان	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le plan (P) d'équation $x + y + z - 1 = 0$, la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t + 5 \\ z = 3t + 9 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$,

et H (1, 1, -1) un point de (P).

1) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de (d) et (P).

2) Soit (Δ) la droite passant par H et perpendiculaire à (P).

a) Ecrire un système d'équations paramétriques de (Δ).

b) Vérifier que E (2,2,0) est le point d'intersection de (Δ) et (d).

c) Calculer l'angle que forme (d) avec (P).

3) Soit (Q) le plan qui passe par les deux points O et F (2, 1,0), et perpendiculaire à (P).

a) Ecrire une équation du plan (Q).

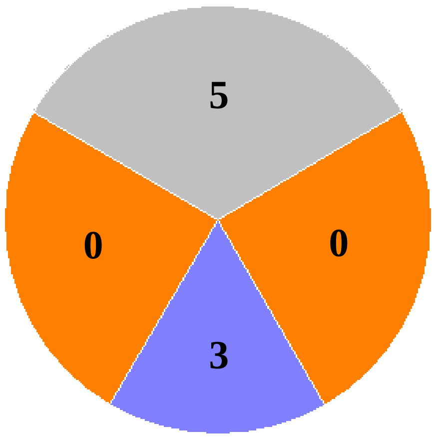
b) Soit M(x,y,z) un point variable de (Q).Montrer que le volume du tétraèdre MEAH est constant.

c) Déduire que les deux plans (Q) et (EAH) sont parallèles.

II- (4 points)

Un jeu consiste à lancer une fléchette sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme l'indique la figure ci-contre.

On note P_0 la probabilité d'obtenir 0 point, P_3 la probabilité d'obtenir 3 points et P_5 la probabilité d'obtenir 5 points.



1) Sachant que la fléchette touche la cible à tous les coups et que $P_5 = \frac{1}{2} P_3$ et $P_5 = \frac{1}{3} P_0$, vérifier que $P_5 = \frac{1}{6}$.

2) Dans cette partie, le jeu consiste à lancer 2 fléchettes au maximum, et on suppose que les 2 lancements sont indépendants. Le joueur gagne la partie s'il obtient 5 au premier lancement et, le jeu s'arrête, ou s'il obtient un total supérieur ou égal à 5.

On considère les événements suivants :

- G_1 : « le joueur gagne la partie en 1 lancement ».
- G_2 :« le joueur gagne la partie en 2 lancements ».
- G_0 :« le joueur perd la partie ».

Montrer que $P(G_2) = \frac{1}{4}$, puis déduire $P(G_0)$.

3) Pour participer à ce jeu, le joueur doit payer 2000 L.L.

Si le joueur gagne en un lancement, il reçoit 5 000 L.L.

S'il gagne en deux lancements, il reçoit 3000 L.L.

S'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie.

a- Vérifier que les valeurs possibles pour X sont : −2000, 1000 et 3000.

b- Donner la loi de probabilité de X.

c- Ce jeu est favorable si E(X) > 0. Le jeu est-il favorable ?

III- (4points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points E, A, B, M et M' d'affixes respectives i, 2, 2i, z et z'.
Soit z' le nombre complexe définie par: $z' = \frac{2-z}{2+iz}$.

1) Si $z = -2i$ .Ecrire z' sous forme exponentielle.
2) **a)** Montrer que (z'-i)(2+iz) =2 – 2i .
b) Vérifier que 2 + iz = i (z – 2i).
c) Déduire la valeur de (z'- i)(z – 2i).
d) Calculer $BM \times EM'$ et $(\vec{u},\overrightarrow{BM}) + (\vec{u},\overrightarrow{EM'})$.
3) Soit z = x+iy et z' = x'+iy'.
a) Calculer x' et y' en fonction de x et y.
b) Si z' est un imaginaire pur, montrer que M varie sur une droite dont on déterminera l'équation.
c) Calculer, dans ce cas, l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{BM})$.

IV- (8points).

Partie A

Soit g la fonction définie sur$]0;+\infty[$ par $g(x) = ax^2 - 2\ln x + b$. (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. A est le point de (C_g) tel que $x_A = 1$.

1) Trouver a et b sachant que (C_g) est tangente en A, à la droite (d) : y = 2x + 2.

2) Dans ce qui suit a = b = 2.
a) Calculer $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
b) Dresser le tableau de variations de g, en déduire que g (x) > 0 pour tout reel x > 0.

3) Soit h la fonction définie sur$]0;+\infty[$par $h(x) = x^2 - \ln^2 x + 2\ln x - 1$.
a) Calculer $\lim_{x\to 0} h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.
b) Montrer que $h'(x) = \frac{g(x)}{x}$. En déduire que h est croissante.
c) Calculer h(1) et déterminer le signe h(x).

Partie B

Soit f la fonction définie sur$]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln^2 x}{x}$; (C) étant sa courbe représentative

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Montrer que la droite (Δ) y = x – 1 est une asymptote à (C).
c) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ).

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.
b) Dresser le tableau de variations de f.
c) Trouver le point B de(C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ).
d) Calculer $f(\frac{1}{2})$, f (2), et tracer (Δ), (T) et (C).

3) a) Pour $x \geq 1$, montrer que f admet une fonction inverse P, dont on déterminera le domaine de définition.
b) Tracer la courbe (C') de P, dans le même repère de (C).

4) On suppose que $P(2) = \alpha$.
a) Montrer que $2{,}2 < \alpha < 2{,}3$.
b) Montrer que $P'(2)=\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 - 3\alpha + 2\ln\alpha}$.

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: علوم الحياة نموذج رقم -٤- المدّة : ساعتان	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

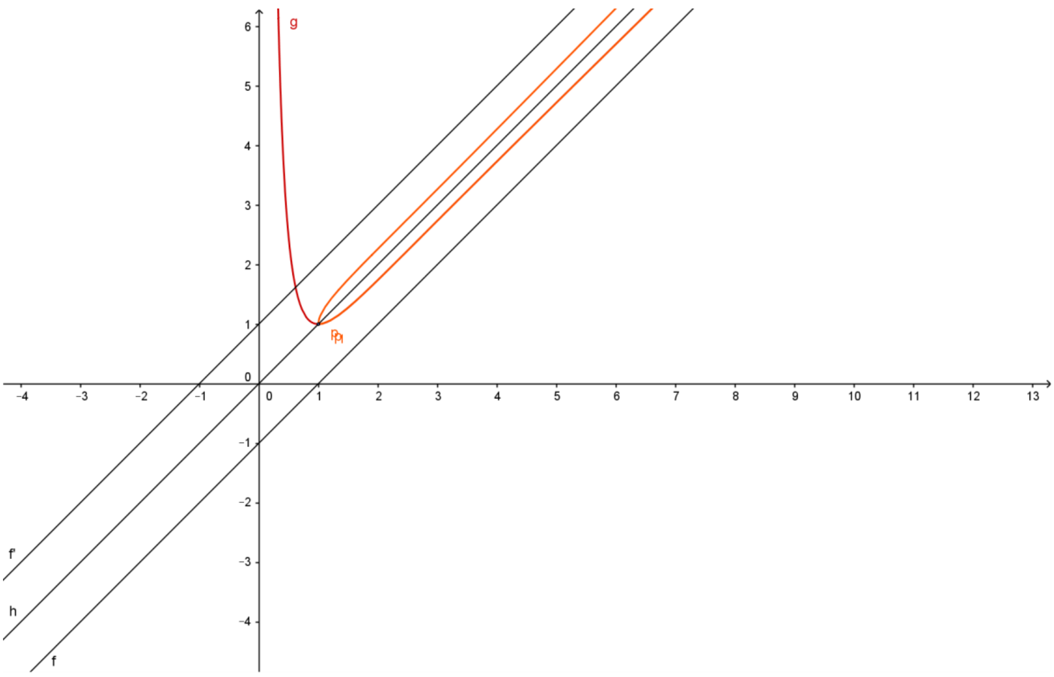
	Question I	Note
1	A(3;1;-3) pour t=-4	0.5
2.a	$\begin{cases} x = k+1 \\ y = k+1 \\ z = k-1 \end{cases}$	0.5
2.b	$E \in (\Delta)$ pour t=-3 et $E \in (d)$ pour k=1 $\Rightarrow \{E\} = (\Delta) \cap (d)$	0.5
2.c	l'angle est $H\hat{A}E$ et $\cos H\hat{A}E = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \simeq 0.85$ alors $H\hat{A}E = 32^\circ$	0.5
3.a	$\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OF} \wedge \overrightarrow{N_P}\right) = 0 \Rightarrow (Q): x - 2y + z = 0$.	0.75
3.b	$V = \frac{1}{6}\left\lvert \overrightarrow{EM}.\left(\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{EH}\right)\right\rvert = \frac{2}{3}U^3$	0.75
3.c	Le volume est indépendant de M, donc la distance de (Q) à (EAH) est constant alors (Q)//(EAH).	0.5

	Question II	Note
1	$P_0 + P_3 + P_5 = 1$, donc $P_5 = \frac{1}{6}$	0.5
2	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$	1
	$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$	0.5
3.a	$-2000 \to P(G_0)$ $1000 \to P(G_2)$ $3000 \to P(G_1)$	0.5
3.b	<table><tr><td>X = x_i</td><td>−2000</td><td>1000</td><td>3000</td></tr><tr><td>p(X = x_i)</td><td>7/12</td><td>1/4</td><td>1/6</td></tr></table>	1
3.c	$E(X) = \frac{-1250}{3} < 0$, donc, cle jeu n'est pas favorable.	0.5

	Question III	Note
1	$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$	0.5
2.a	$\left(\frac{2-z}{2+iz} - i\right)(2+iz) = 2 - 2i$	0.5
2.b	$2 + iz = i\left(z + \frac{2}{i}\right) = i(z - 2i)$	0.5

2.c	$(z'-i)(z-2i)=\dfrac{2-2i}{i(z-2i)}(z-2i)=\dfrac{2-2i}{i}=-2-2i$	**0.5**
2.d	$EM'\times BM=\lvert -2-2i\rvert=2\sqrt{2}$; $(\overrightarrow{U},\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{U},\overrightarrow{EM'})=\arg(-2-2i)=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$	**0.5**
3.a	$x'=\dfrac{4-2x-2y}{x^2+(2-y)^2}$; $y'=\dfrac{x^2+y^2-2x-2y}{x^2+(2-y)^2}$	**0.5**
3.b	z' est imaginaire pur, alors x'=0 et y'≠0 donc M varie sur la droite d'équation 2−x−y =0, privée des deux points A et B.	**0.5**
3.c	$(\overrightarrow{U};\overrightarrow{EM'})=\pm\dfrac{\pi}{2}$ alors $(\overrightarrow{U},\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}\,ou\,\dfrac{-\pi}{4}$.	**0.5**

<table>
<tr><th colspan="2">Question IV</th><th>Note</th></tr>
<tr><td colspan="2">Partie A</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>g(1) = 4 et g'(1)=2 alors a=b=2</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>g'(x)= $4x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{4x^2-2}{x}$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>g'(x)</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>g(x)</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>$3-2\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
puisque min (g(x)>0) alors g(x)>0
dans son domaine de définition.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.a</td><td>$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.b</td><td>$h'(x)=2x-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{g(x)}{x}$ et h'(x) > 0 alors h est croissante.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.c</td><td>h(1) = 0 alors h(x) > 0 pour x >1 et h(x) < 0 pour 0 < x <1.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Partie B</td><td></td></tr>
<tr><td>1.a</td><td>$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln^2 x}{x}=0$
alors (Δ) est une asymptote oblique à (C).</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>1.c</td><td>$f(x)-(x-1)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}>0$ alors (Δ) est au dessous de (C).</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$f'(x)=1+\dfrac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'(x)</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>1</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table></td><td>0.5</td></tr>
</table>

2.c	f(0.5) =2.46 et f(2) = 1.74 	**1**
2.d	f'(x) =1, alors $h(x)=x^2$ par suite $(\ln x-1)^2=0$ donc $B(e, f(e))$.	**0.5**
3.a	Pour $x\in[1;+\infty[$, f définie continue et strictement croissante, alors elle admet une fonction réciproque P= f^{-1} et $D_P=[1;+\infty[$	**0.25**
3.b	Le graphe de P (C') est symétrique à (C) par rapport à la première bissectrice d'équation y = x.	**0.5**
4.a	$(2,\alpha)\in(C')\Rightarrow(\alpha,2)\in(C)$ avec $\alpha\geq 1$ $f(\alpha)=2$, $f(2.2)\prec 2$ et $f(2.3)\succ 2$ puisque f est croissante pour $x\geq 1$ alors $2.2\prec\alpha\prec 2.3$	**0.5**
4.b	$P'(2)=\dfrac{1}{f'(\alpha)}=\dfrac{\alpha^2}{h(\alpha)}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-\ln^2\alpha+2\ln\alpha-1}$ ou bien $f(\alpha)=2\Rightarrow\alpha^2-\alpha+1+\ln^2\alpha=2\alpha\Rightarrow P'(2)=\dfrac{\alpha^2}{2\alpha^2-3\alpha+2\ln\alpha}$	**0.5**