المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: علوم الحياة نموذج رقم -٣- المدّة : ساعتان	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

نموذج مسابقة (يراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A(2,2,0) et la droite (d) d'équations paramétriques: (d): $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$, avec t un réel.

Soit (P) le plan déterminé par A et(d).

1) Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par A et (d) est $x + y - z - 4 = 0$.

2) Soit (Q) le plan contenant (d) et perpendiculaire à (P).
Ecrire une équation du plan (Q).

3) Considérons, dans le plan (Q), le cercle (C) de centre B (-3, 0, 2) et de rayon $R=3\sqrt{3}$.
a- Montrer que (C) est tangent à (d).
b- Trouver les coordonnées de E point de tangence entre (d) et (C).

4) Montrer que le point L (-6,-3,5) est le symétrique du point E par rapport à B.

5) Soit F (1, 3, 0) un point de (d) et M un point variable de la droite (Δ) tangente à (C) au point L.
Calculer l'aire du triangle MEF.

II- (4 points)

Un sac U contient des boules blanches et des boules noires.
40% des boules sont blanches et les autres, noires.
20% des boules blanches et 30% des boules noires portent le nombre 0.
Un autre sac V contient 5 boules numérotées 0 et 5 boules numérotées -1.

Partie A

Une boule est tirée au hasard de U
On considère l'évènement:
E: "La boule tirée est numérotée 0."

1) Prouver que P(E) = 0,26.

2) Sachant que la boule tirée ne porte pas 0, calculer la probabilité pour que la boule soit blanche.

Partie B

Dans ce qui suit, on considère le jeu suivant :

On tire une boule de U.

- Si la boule tirée porte le nombre 0, on la remet dans V puis on tire au hasard et simultanément deux boules de V.
- Sinon, la boule est extraite du jeu et une boule sera tirée au hasard de V.

Soit X la variable aléatoire qui désigne la somme des points obtenus à la fin du jeu.

a- Vérifier que les valeurs possibles de X sont -2, -1 , 0 .

b- Vérifier que $P(X=0) = \frac{97}{220}$ et déterminer la loi de probabilité de X.

III- (4 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$.

1) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) Soit C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + i$ et D le point tel que OC = OD et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}\,(2\pi)$. Déterminer l'affixe de D.

3) Soit G le point d'affixe $g = -4\sqrt{3} + 6i$.

a- Montrer que OBGD est un parallélogramme.

b- Vérifier que : $\frac{c-g}{a-g} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c- Déduire une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$ et la valeur du rapport $\frac{GC}{GA}$.

d- Quelle est la nature du triangle AGC?

IV- (8 points)

Partie A

Soit g la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = (1-x)e^{-x} + 1$; .

1) Calculer lim g(x) quand $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.

2) a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Déduire que $g(x) > 0$ pour tout x réel.

Partie B

On considère l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + y = x + 2$.

1)

a) Vérifier que $u(x) = x$ est une solution particulière de (E).

b) On suppose que $y = z + u$. Écrire une équation différentielle (E') vérifiée par z, puis résoudre (E').

c) En déduire $y = f(x)$ la solution générale de (E).

d) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Déterminer f dans le cas où (C) est tangente en O à la droite $y = 2x$.

2) Dans ce qui suit, on suppose que $f(x) = xe^{-x} + x$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

c) Étudier la position de (C) par rapport à (d).

4)

a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Etudier la concavité de (C) et vérifier qu'elle admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

c) Déterminer le point E de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d).

d) Tracer (d), (T) et (C).

5) Considérons la fonction h définie par $h(x)=\ln(y_E - f(x))$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Dresser le tableau de variation de h.

6) Calculer l'aire A, du domaine limité par (C), (d), et les deux droites d'équations ($x = -1$) et ($x = 1$).

المادة: الرياضيات الشهادة: الثانوية العامة الفرع: علوم الحياة نموذج رقم -٣- المدّة : ساعتان	الهيئة الأكاديميّة المشتركة قسم : الرياضيات	المركز التربوي للبحوث والإنماء

أسس التصحيح (تراعي تعليق الدروس والتوصيف المعدّل للعام الدراسي ٢٠١٦-٢٠١٧ وحتى صدور المناهج المطوّرة)

	Question I	note
1	(P) = (A ,(d)) : x + y – z – 4 = 0.	**0.5**
2	(Q) contient (d) et perpendiculaire à (P) donc $\overrightarrow{BM}\cdot(\overrightarrow{u_d}\times\overrightarrow{N_p}) = 0$ (Q) : x – 2y – z + 5 = 0 .	**0.5**
3.a	d(B,(d)) = 3 $\sqrt{3}$.= R . (d) est tangente à (C).	**0.75**
3.b	$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{v_d} = 0$ avec $\overrightarrow{BE}$ (- t + 4,3, - t – 2) et $\overrightarrow{v_d}$ (- 1 , 0,- 1) . Donc t = 1 et E(0,3,- 1).	**0.5**
4	B milieu de [EL].	**0.5**
5	(Δ) passe par L et parallèle à (d).Donc d(M,(d)) = d(L ,(d)) =d(L,(P)) = 6 $\sqrt{3}$ Aire du triangle MEF = $\frac{EL\times EF}{2} = 3\sqrt{6}\,u^2$	**1.25**

	Question II	note
	Part A	
1	P(E) = P(W$\cap$E) + P(B$\cap$E) = 0.08 + 0.18 = 0.26	**1**
2	$P(W/\overline{E}) = \frac{P(W\cap\overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{E}/W)\times P(W)}{P(\overline{E})} = \frac{0.32}{0.74} = 0.432$	**0.75**
	Part B	
1	donc X = $\{0,-1,-2\}$	**0,75**
2	$P(X=0) = 0.26\,\frac{C_6^2}{C_{11}^2} + 0.74\,\frac{C_5^1}{C_{10}^1} = \frac{97}{220}$ $P(X=-1) = 0.26\,\frac{6\times5}{C_{11}^2} + 0.74\,\frac{5}{10} = \frac{563}{1100}$ $P(X=-2) = 0.26\,\frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{13}{275}$	**1.5**

	Question III	note
1)	OA = | a | = | $-4\sqrt{3}$ – 4i | = 8 OB = | b | = | $-4\sqrt{3}$ + 4i | = 8 AB = | b – a | = | 8i | = 8 Donc OAB est un triangle équilatéral.	**0.5**
2)	OC = OD, donc $\|z_D\| = \|z_C\| = \|\sqrt{3}+i\| = 2$ $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}) = \arg\left(\frac{z_D}{z_C}\right) = \arg(z_D) - \arg(z_C) = \arg(z_D) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, alors $\arg(z_D) = \frac{\pi}{2}$ $z_D = \|z_D\| \times e^{i\arg(z_D)} = 2i$	**1**

<table>
<tr><td>3.a</td><td>$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B = b = -4\sqrt{3} + 4i$
$z_{\overrightarrow{DG}} = z_G - z_D = g - z_D = -4\sqrt{3} + 6i - 2i = -4\sqrt{3} + 4i$
$z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{DG}}$; alors OBGD est un parallélogramme.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.b</td><td>$\frac{c-g}{a-g} = \frac{\sqrt{3}+i-(-4\sqrt{3}+6i)}{-4\sqrt{3}-4i-(-4\sqrt{3}+6i)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.c</td><td>$(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}) = \arg\left(\frac{c-g}{a-g}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$
$\frac{GC}{GA} = \left|\frac{c-g}{a-g}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$</td><td>0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>3.d</td><td>AGC est un triangle équilatéral, isocèle avec un angle de 60°.</td><td>0.5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Question IV</th><th>Mark</th></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Partie A</u></td></tr>
<tr><td>1</td><td>$x \to -\infty$, $g(x) \to +\infty$.
$x \to +\infty$, $g(x) \to 1$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>g’(x) = - e^{x} - e^{-x} (1-x) = e^{-x} (x – 2).
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & +\infty & \searrow & 1-\frac{1}{e} & \nearrow & 1 \end{array}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>Min (g(x)) est positif donc g(x) est positive pour tout réel x.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Partie B</u></td></tr>
<tr><td>1.a</td><td>u’ = 1 et u’’= 0 ,   u = x solution de (E).</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>1.b</td><td>y = z + u .   z’’ + u’’ + 2z’ + 2u’ + z + u = x + 2
z’’ + z’ + z = 0 .
r^2 + r + 1 = 0 ; r = - 1 donc z = (C_1x + C_2) e^{-x} avec C_1 et C_2 constantes .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1.c</td><td>y = z + u = x + (C_1x + C_2) e^{-x} = f(x) avec C_1 et C_2 constantes .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>1.d</td><td>f(0)= 0 et f ’(0) = 2 donc f(x) = xe^{-x} + x .</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.a</td><td>$x \to -\infty, f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.b</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ alors (d) est une asymptote à (C).</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.c</td><td>f (x) – x = x e^{-x}.
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x) – x</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>position</td><td>(C) au-dessous de (d)</td><td colspan="2">(C) au-dessus de (d).</td></tr></table>
Pour x=0 (C) $\cap$ (d) = $O(0,0)$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.a</td><td>f ‘(x) = e^{-x} (1 – x) + 1 = g (x) > 0 .
$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & \nearrow & \end{array}$</td><td>0.25</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3.b</td><td>

f ''(x) = g'(x).

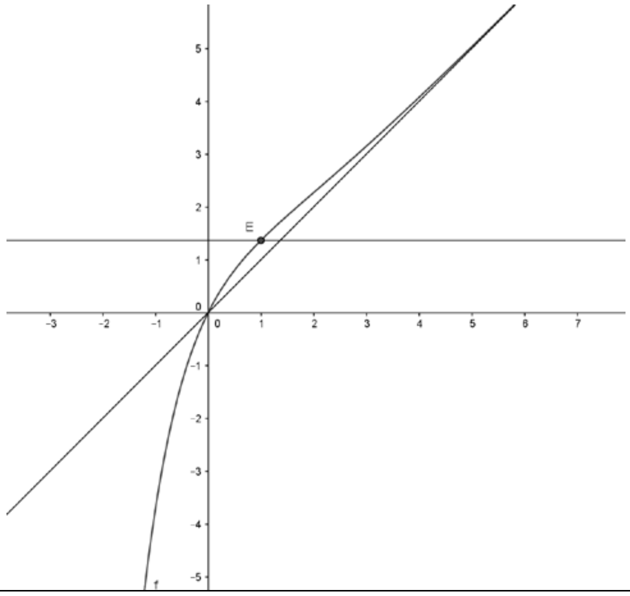
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f ''(x)</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>concavité</td><td colspan="2">concave vers le bas</td><td colspan="3">concave vers le haut</td></tr>
</table>

$I\left(2\ ;\ 2+\frac{2}{e^2}\right)$ point d'inflexion

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3.c</td><td>

f '(x) = 1 ;g(x) = 1
e^{-x} (1-x) + 1 = 1
x = 1 $E\left(1\ ,\ 1+\frac{1}{e}\right)$

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3.d</td><td>



</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>4.a</td><td>

h (x) = ln (y_E – f (x)).
y_E - f(x) > 0 ;   f (x) < y_E donc x < 1. Par la suite D_h =] $-\infty$, 1 [.

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>4.b</td><td>

h'(x) = $\dfrac{-f'(x)}{y_E - f(x)}$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>h'(x)</td><td></td><td>–</td><td>||</td></tr>
<tr><td>h (x)</td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$ ||</td></tr>
</table>

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

Aire $=\int_{-1}^{0}\big(x-f(x)\big)dx+\int_{0}^{1}\big(f(x)-x\big)dx=\int_{-1}^{0}(-xe^{-x})dx+\int_{0}^{1}(xe^{-x})dx$. On utilise une integration par parties.

</td><td>0.75</td></tr>
</table>