الدورة العادية للعام ٢٠١٢	**امتحانات الشهادة الثانوية العامة** **فرع الإجتماع والإقتصاد**	**وزارة التربية والتعليم العالي** **المديرية العامة للتربية** **دائرة الامتحانات**
الاسم: **الرقم:**	مسابقة في مادة الرياضيات **المدة: ساعتان**	**عدد المسائل: أربع**

ملاحظة: - يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المُرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 points)

Les résultats d'une enquête menée par une entreprise sur l'évolution du prix x_i d'un article et le nombre y_i des clients qui ont acheté cet article, sont donnés dans le tableau suivant :

Prix unitaire de l'article: x_i en milliers LL	**12**	**15**	**18**	**22**	**24**
Nombre d'acheteurs : y_i en centaines	**16**	**13**	**11**	**9**	**6**

1) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $(x_i ; y_i)$.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point dans le repère précédent.
3) Déterminer le coefficient de corrélation et interpréter la valeur ainsi trouvée.
4) Ecrire une équation de la droite de régression ($D_{y/x}$) de y en x et tracer cette droite dans le repère précédent.
5) On suppose que l'évolution des prix continue selon le même modèle et que le prix de cet article atteint 25 000LL.
   a- Montrer que le nombre d'acheteurs à ce prix est estimé à 581.
   b- On suppose dans ce cas que chacun de ces clients achète l'article.
   Le coût de production de cet article s'élève à 8 000LL, estimer alors le profit total .

II- (4 points)

La troisième année secondaire d'une école comprend 3 sections : SE, SV et SG.
40 % des élèves de cette année sont en SE et 40% sont en SV.
Tous les élèves de cette année ont présenté un examen à la fin du premier trimestre.

- $\frac{5}{8}$ des élèves de la section SE ont réussi cet examen ;
- 50% des élèves de la section SV ont réussi cet examen ;
- 60 % de tous les élèves ont réussi cet examen.

On choisit au hasard un élève de la troisième année secondaire de cette école.
On considère les événements suivants :
E : « l'élève choisi est en SE » ;
V : « l'élève choisi est en SV » ;
G : « l'élève choisi est en SG » ;
R : « l'élève choisi a réussi l'examen ».

1) Calculer les probabilités $P(E\cap R)$, $P(V\cap R)$, et déduire que $P(G\cap R)$ est égale à 0,15.
2) L'élève a réussi son examen. Calculer la probabilité qu'il soit en SG ?
3) Dans cette question, on suppose que la troisième année secondaire de cette école compte 60 élèves.
   On choisit simultanément et au hasard un groupe de 2 élèves parmi ces 60 élèves.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves de ce groupe qui ont réussi l'examen.
   a- Vérifier que $P(X = 1) = \frac{144}{295}$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de X.

III- (4 points)

Une banque propose à sa clientèle, ayant moins de 25 ans, l'offre suivante :
déposer à la banque une somme de 2 000 000 LL à un taux d'intérêt annuel de 9% avec capitalisation mensuelle des intérêts auxquels la banque ajoute directement chaque mois une somme de 9 000 LL.
Imad décide de profiter de cette offre.
On désigne par S_n la somme qu'il aura dans son compte après n mois. Ainsi $S_o = 2\,000\,000$.

1) Démontrer que $S_{n+1} = 1,0075\, S_n + 9\,000$.
2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = S_n + 1\,200\,000$ pour tout entier naturel n.
   a-Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_o.
   b-Exprimer V_n en fonction de n . En déduire S_n en fonction de n .
3) Après combien de mois le montant du compte de Imad dépassera-t-il pour la première fois 4 000 000 LL ?

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + e^{-x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

A-

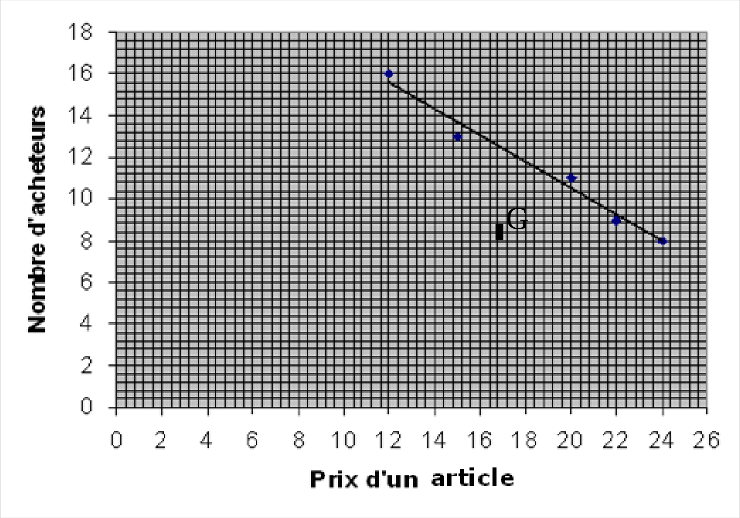
1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b- Soit (d) la droite d'équation y = x. Démontrer que (C) est au-dessus de (d).
   c- Vérifier que la droite (d) est une asymptote à (C).
2) a- Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.
   b- Tracer (d) et (C).
3) Déterminer sur $[0\,;+\infty[$ une primitive F de f et déduire l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 2.

B-

Une entreprise veut lancer un nouveau produit sur le marché.
Le coût moyen est donné par $f(x) = x + e^{-x+2}$ où x représente la quantité quotidienne fabriquée en dizaines d'unités ($1 \le x \le 8$) et f(x) représente le coût moyen en millions de LL.
1) Donner une interprétation économique au minimum de f(x).
2) Déterminer le coût total $C_T(x)$ de la production de x dizaines d'unités.
3) a- Le prix de vente d'une unité est fixé à 200 000 LL ; montrer que le profit, dû à la vente de x dizaines d'unités, est donné par $P(x) = 2x - x^2 - xe^{-x+2}$.
   b- Si l'entreprise vend 60 unités du produit, réalise-t-elle un bénéfice ?
   c- Recopier et compléter le tableau de variations de la fonction P donné ci-dessous :

x	1		2 – ln2		8
P'(x)	0	+	0	–	
P(x)					

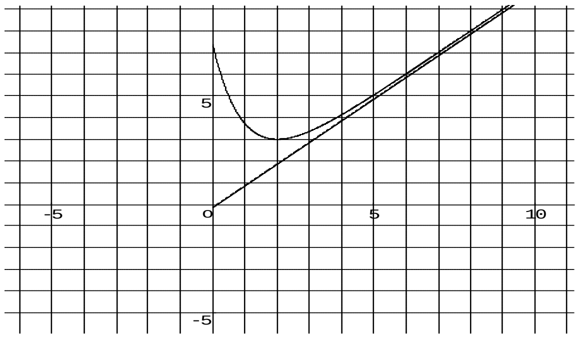
   d- L'entreprise a-t-elle intérêt à lancer ce nouveau produit sur le marché ? Justifier.

I	Corrigé	Note
1		1
2	$\overline{x} = 18{,}2$; $\overline{y} = 11$ (calculatrice) G(18,2: 11).	1
3	r = – 0,987 (calculatrice) ; Il y a une forte corrélation linéaire négative entre les deux variables.	1
4	y = – 0,76x + 24,913(calculatrice)	1
5a	Le prix d'un article est 25000LL donc x = 25 d'où y = – 0,76× 25 + 24,913; y = 5,81 . Donc le nombre d'acheteurs est 581.	1.5
5b	Le profit total est (25000-8000)$\times$581 = 9877000LL.	1.5

II	Corrigé	Note
1	$P(E\cap R) = P(E) \times P(R/E) = (40/100)\times(5/8) = 0{,}25$. $P(V\cap R) = P(V) \times P(R/V) = (40/100)\times(1/2) = 0{,}2$. $P(R) = P(G\cap R) + P(V\cap R) + P(E\cap R)$. Donc, $P(G\cap R) = 0{,}6 - 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}15$.	2.5
2	$P(G/R) = \dfrac{P(G\cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$.	1.5
3a	Les élèves qui ont réussi l'examen sont $0{,}6\times 60 = 36$. $P(X=1) = \dfrac{C_{36}^{1}\times C_{24}^{1}}{C_{60}^{2}} = \dfrac{864}{1770} = \dfrac{144}{295}$.	1
3b	Les valeurs possibles de X sont 0,1et 2. $P(X=0) = \dfrac{C_{24}^{2}}{C_{60}^{2}} = \dfrac{46}{295}$; $P(X=1) = \dfrac{144}{295}$; $P(X=2) = \dfrac{C_{36}^{2}}{C_{60}^{2}} = \dfrac{21}{59}$.	2

III	Corrigé	Note
1	$S_{n+1} = S_n(1+\dfrac{0{,}09}{12}) + 9\,000 = 1{,}0075S_n + 9\,000$.	1
2a	$V_{n+1} = S_{n+1} + 75 = 1{,}0075S_n + 9000 + 1200000$ $= 1{,}0075(S_n + \dfrac{1209000}{1{,}0075}) = 1{,}0075(S_n + 1200000)$ $= 1{,}0075V_n$ (V_n) est une suite géométrique de 1er terme $V_0 = S_0 + 1200000 = 3200000$ et de raison q=1,0075.	2
2b	$V_n = V_0q^n = 3200000(1{,}0075)^n$. $S_n = V_n - 1200000 = 3200000(1{,}0075)^n - 1200000$.	2

3	$S_n > 4000000$; $3200000(1{,}0075)^n > 5200000$, $n\ln(1{,}0075) > \ln(1{,}625)$, n>64,97 Donc après 65 mois, le montant du compte de Imad dépasse pour la première fois 4000000 LL.	2

IV	Corrigé	Note
A1a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+2} = 0$.	0.5
A 1b	$f(x) - x = e^{-x+2} > 0$ pour tout x. Donc, (C) est au-dessus de (d)	1
A1c	$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+2} = 0$; la droite (d) d'équation y = x est asymptote à (C).	1
A2a	$f'(x) = 1 - e^{-x+2}$ sur $[0, +\infty[$. $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & e^2 & \searrow & 3 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1.5
A2b	 	1.5
A3	$F(x)= \frac{x^2}{2} - e^{-x+2}$; L'aire du domaine est $\int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - e^{-x+2}\right]_0^2 = \left(1 + e^2\right)$.	1.5
B1	Interprétation économique : pour la production quotidienne de 20 unités du produit, le coût moyen minimum de production est 3 000 000LL.	1
B2	$C_T(x) = x\,f(x) = x^2 + x\,e^{-x+2}$.	1
B3a	Le revenu est $R(x) = (x \times 10) \times (200\,000) \times \frac{1}{1000000} = 2x$ Le profit P(x) dû à la vente de x dizaines d'unités du produit est : $P(x) = 2x - x^2 - x\,e^{-x+2}$.	1.5
B3b	$P(6) = 12 - 36 - 6e^{-4} = -24 - 6e^{-4}$. L'entreprise ne réalise pas un bénéfice .	1
B3c	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 1 & & 2-\ln 2 & & 8 \\ \hline P'(x) & 0 & + & 0 & - & \\ \hline P(x) & 1-e & \nearrow & -1{,}707 & \searrow & -48{,}01 \end{array}$	1
B3d	D'après le tableau de variations de P, P(x) <0 donc l'entreprise n'a pas intérêt à lancer ce nouveau produit sur le marché.	1.5