وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	الدورة الإستثنائية للعام 2011
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Écrire le numéro de chaque question et donner en justifiant la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c
1	Si f est la fonction donnée par $f(x)=\ln x$, alors le domaine de définition de $f\circ f$ est :	$]1;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$]0;1[\cup]1;+\infty[$
2	L'image par l'inversion $I(O;1)$ du cercle (C) de centre O et de rayon 1 est :	(C)	une droite	un cercle passant par O
3	La dérivée d'ordre n de la fonction donnée par $f(x)=\ln(x+1)$ est:	$\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^n}$	$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$	$\frac{(-1)^{n}(n-1)!}{(x+1)^n}$
4	$\int\frac{1}{x^2+4x+8}dx=$	$\arctan\frac{x+2}{2}+k$	$\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}+k$	$\frac{1}{4}\arctan\frac{x+2}{2}+k$
5	La fonction F définie sur IR par $F(x)=\int_1^{x^2}\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$ est :	croissante sur IR	décroissante sur IR	non monotone sur IR
6	ABC est un triangle tel que : AB = 5, BC= 4 et AC = $\sqrt{21}$. La médiane AI est égale à :	2	$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$	$\sqrt{19}$

II- (2 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne les points $A(1\,;-1\,;1)$, $B(2\,;0\,;3)$, $C(-1\,;1\,;1)$ et $G(4\,;2\,;4)$.
On désigne par (P) le plan déterminé par A, B et C.

1) a- Calculer l'aire du triangle ABC.
   b- Calculer le volume du tétraèdre GABC et déduire la distance de G au plan (P).

2) Prouver que $x + y - z + 1 = 0$ est une équation du plan (P).

3) a- Montrer que le point $F(2\,;0\,;6)$ est symétrique de G par rapport au plan (P).
   b- Donner un système d'équations paramétriques de la droite (d) symétrique de la droite (AF) par rapport au plan (P).
   c- Démontrer que la droite (AB) est une bissectrice de l'angle $\widehat{FAG}$.

III- (3 points)

A- Une urne U contient : cinq boules rouges portant chacune le nombre 2 et
trois boules blanches portant chacune le nombre -3.
On tire simultanément et au hasard 4 boules de l'urne U.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres portés par les 4 boules tirées.

1) Déterminer les 4 valeurs possibles de X.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

B- Dans cette partie on suppose que l'urne U contient 5 boules rouges et n boules blanches ($n > 1$).
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E : « Les deux boules tirées sont rouges »
   F : « Les deux boules tirées sont de la même couleur ».

2) a- Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur, montrer que la probabilité p qu'elles soient toutes les deux rouges, est $p = \dfrac{20}{n^2 - n + 20}$.
   b- Combien de boules blanches l'urne doit-elle contenir pour que l'on ait $p > \dfrac{10}{13}$?

IV- (3 points)

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on considère l'hyperbole (H) de foyer $F(2\,;0)$, de directrice la droite (d) d'équation $x=\frac{1}{2}$ et d'excentricité 2 .

1) a- Ecrire une équation de (H) et déterminer son centre.
   b- Déterminer les sommets et les asymptotes de (H) . Tracer (H) .

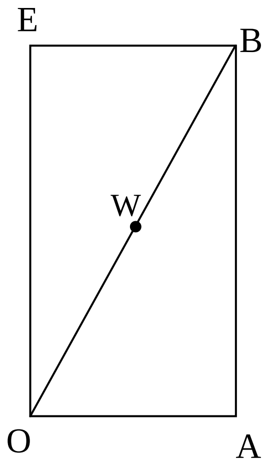
2) Soit (E) l'ellipse de foyer F, de centre O et d'excentricité $\frac{1}{2}$.
   a- Déterminer les sommets de (E) et tracer (E) dans le même repère que (H) .
   b- Ecrire une équation de (E) .

3) a- Vérifier que le point I(2 ;3) est un point d'intersection de (E) et (H) .
   b- Prouver que les tangentes en I à (E) et à (H) sont perpendiculaires.

4) Soit (D) le domaine limité par (E) , (H) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
   Calculer le volume du solide engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

V-(3 points)

On donne dans un plan orienté le rectangle OABE tel que $OA=2$ et $\left(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.



On désigne par (C) le cercle de diamètre [OB] et de centre W.

Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

A-

1) Soit A' le point de la demi-droite [OB) tel que $OA'=2\sqrt{3}$.
   Prouver que A' est l'image de A par S .

2) a- Vérifier que le triangle OAW est équilatéral.
   b- Déterminer l'image par S du triangle OAW.
   c- Construire alors le cercle (C'), image de (C) par S.

B-

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$,tel que :

$z_A=2$ et $z_E=2\sqrt{3}i$.

1) Ecrire la forme complexe de S.

2) Trouver l'affixe de W et celle du point W', image de W par S.

3) Soit f la transformation plane de forme complexe $z'=iz+4+2i\sqrt{3}$.
   a- Montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre H et un angle.
   b- Vérifier que $f(W')=W$ et déterminer $f\circ S(W)$.
   c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\circ S$.

VI- (7 points)

A-

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C) .

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) Calculer f '(x) et dresser le tableau de variations de f.

3) a- Tracer la courbe (C).

b- Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation : $me^{2x} - x^2 = 0$.

B-

Soit (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$.

1) Démontrer que $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

2) Démontrer que (I_n) est décroissante.

3) Déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

4) En utilisant une intégration par parties, démontrer que $I_{n+1} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{e^2} + (n+1)I_n\right]$.

5) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$, calculer $h'(x)$ puis calculer I_1.

6) Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = 0 et x = 1.

C-

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(f(x))$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et montrer que la courbe représentative de g admet une direction asymptotique.

3) Dresser le tableau de variations de g.

4) Tracer la courbe représentative de g dans un nouveau repère.

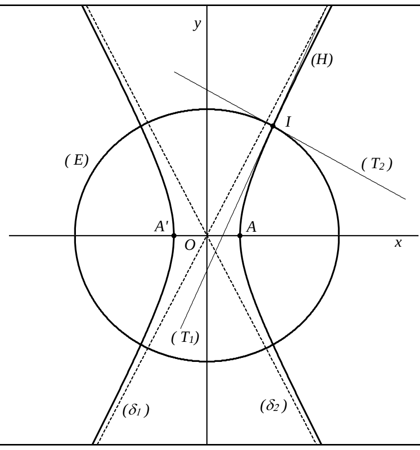
وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة مشروع معيار التصحيح	الدورة الإستثنائية للعام 2011

QI	Corrigé	Note
1	$f\circ f(x)=\ln(\ln(x)),\ x>0$ et $\ln x>0\Rightarrow x>1.$ (a)	0.5
2	Le cercle (C) est l'ensemble des points invariants par I donc l'image de (C) est lui-même. (a)	0.5
3	$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $f''(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}=\dfrac{(-1)^1\times 1!}{(x+1)^2}$ (b)	0.5
4	$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4x+8}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)+K$ (b)	1
5	$F'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$; F est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ donc f n'est pas monotone sur IR. (c)	0.5
6	$AI^2=AB^2+BI^2-2AB\times BI\cos B$ $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B\Rightarrow\cos B=\dfrac{1}{2}$; $AI^2=19\Rightarrow AI=\sqrt{19}$ (c)	1

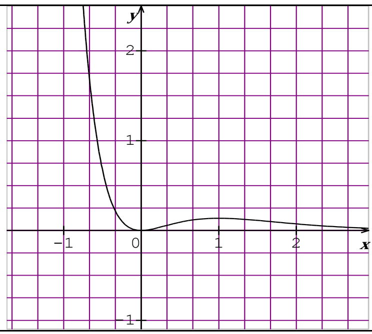
Q II	Corrigé	Note
1a	$S=\dfrac{\Vert\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Vert}{2}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$; $S=2\sqrt{3}\ u^2$.	0.5
1b	$V=\dfrac{\vert\overrightarrow{AG}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\vert}{6}=\dfrac{\vert-12\vert}{6}=2\ u^3$; $V=\dfrac{d\times S}{3}$ d'où $d=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$	1
2	$\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$; $-4(x-1)-4(y+1)+4(z-1)=0$; $x+y-z+1=0$ ⇨OU : Les coordonnées de A , B et C vérifient l'équation de (P) .	0.5
3a	$\overrightarrow{FG}(2;2;-2)$; $\overrightarrow{N_P}(1;1;-1)$; $\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{N_P}$ donc $(FG)\perp(P)$. I milieu de [FG] ; I(3 ; 1 ; 5) ; 3 + 1 – 5 + 1 = 0 donc I appartient à (P). ⇨OU : on démontre que (P) est le plan médiateur de [FG].	0.5
3b	(d) est la droite (AG) : x = m + 1 ; y = m – 1 et z = m + 1.	0.5
3c	(AI) est la bissectrice de $\widehat{FAG}$ car AF = AG et I milieu de [FG], or $\overrightarrow{AI}(2;2;4)$ et $\overrightarrow{AB}(1;1;2)$ donc $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$ et B appartient à la demi-droite [AI).	1

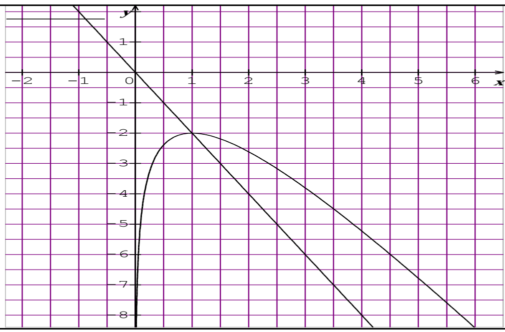
QIII	Corrigé	Note
A1	Les 4 valeurs de X sont : -7 ; -2 ; 3 et 8 .	0.5
A2	x_i : -7 ; -2 ; 3 ; 8 p_i : $\dfrac{C_3^3\times C_5^1}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$; $\dfrac{C_3^2\times C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{C_5^3\times C_3^1}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{C_5^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$	2
B1	$p(E)=\dfrac{C_5^2}{C_{n+5}^2}=\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$	1

	$p(F)=\frac{C_5^2+C_n^2}{C_{n+5}^2}=\frac{20}{(n+4)(n+5)}+\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}=\frac{n^2-n+20}{(n+4)(n+5)}$	
B2a	$p(E/F)=\frac{p(E\cap F)}{p(F)}=\frac{p(E)}{p(F)}=\frac{20}{n^2-n+20}$	1.5
B2b	$\frac{20}{n^2-n+20}>\frac{10}{13}$; $n^2-n-6<0$; $-2<n<3$ mais n>1 donc $n=2$	1

Q IV	Corrigé	Note
1a	$M(x,y)\in(H)$; $MF^2=4d^2(M;(d))$; $x^2-4x+4+y^2=4x^2-4x+1$. (H) : $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. Le centre de (H) est l'origine $O(0;0)$.	1
1b	$a^2=1$, $b^2=3$ Sommets de (H) : $A(1;0)$ et $A'(-1;0)$. Asymptotes de (H) $(\delta_1): y=\sqrt{3}x$ et $(\delta_2): y=-\sqrt{3}x$. 	1
2a	$c=OF=2$ et $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$; donc $a=4$ et $b^2=a^2-c^2=12$ soit $b=2\sqrt{3}$. Les sommets de (E) sont : $(4;0)$, $(-4;0)$, $(0;2\sqrt{3})$ et $(0;-2\sqrt{3})$.	1
2b	L'axe focal de (E) étant $x'x$, $a=4$ et $b=2\sqrt{3}$;donc (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.	0.5
3a	Les coordonnées de I vérifient les équations de (E) et de (H) .	0.5
3b	Tangente en I à (H) est (T_1) : $xx_I-\frac{yy_I}{3}=1$; (T_1) : $2x-y=1$. Tangente en I à (E) est (T_2) : $\frac{xx_I}{16}+\frac{yy_I}{12}=1$;soit (T_2) : $x+2y=1$; pente de $(T_1)\times$ pente de (T_2) = -1 ; donc (T_1) et (T_2) sont perpendiculaires. **Ou** (T_1) est la bissectrice intérieure de $\widehat{FIF'}$ et (T_2) est la bissectrice extérieure de $\widehat{FIF'}$; donc elles sont perpendiculaires .	1
4	$V=\pi\int_1^2\left(y_{(E)}^2-y_{(H)}^2\right)dx=\pi\int_1^2\left[12-\frac{3}{4}x^2-3x^2+3\right]dx=\pi\int_1^2(15-\frac{15}{4}x^2)dx$ $=\pi\left[15x-\frac{15}{4}\times\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{25}{4}\pi$ unités de volume .	1

QV	Corrigé	Note
A1	$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)=\frac{\pi}{3}$ car $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}$ et $OA'=2\sqrt{3}=OA\sqrt{3}$ donc $A'=S(A)$	0.5
A2a	$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OW}\right)=\frac{\pi}{3}$ et $WO=WA$ (W centre du rectangle) donc OAW est équilatéral.	0.5
A2b	OAW est un triangle équilatéral direct donc son image par S est le triangle équilatéral direct $OA'W'$.	0.5
A2c	(C') est le cercle de centre W' et de rayon $OW'=OA'=2\sqrt{3}$ et passe par O.	0.5
B1	$z'=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)z$	0.5
B2	$z_W=\frac{z_B}{2}=1+i\sqrt{3}$, $z_{W'}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)=-\sqrt{3}+3i$	0.5
B3a	$z'=az+b$ avec $a=i$, $\lvert a\rvert=1$ et $\arg a=\frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre H d'affixe $z_H=\frac{b}{1-a}=2-\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.	1
B3b	$iz_{W'}+4+2i\sqrt{3}=1+i\sqrt{3}=z_W$ donc $f(W')=W$, $f\circ S(W)=f(S(W))=f(W')=W$	1
B3c	$f\circ S=f\left(H,1,\frac{\pi}{2}\right)\circ S\left(O,\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)=S\left(W,\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ car f∘S(W)=W.	1

QVI	Corrigé	Note
A1a	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=0$; l'axe des abscisses est une asymptote.	0.5
A1b	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-2x}=-\infty$, D.A verticale.	0.5
A2	f'(x) = 2x(1–x) e^{-2x} $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & e^{-2} & \searrow & 0 \end{array}$	1.5
A3a		1.5
A3b	$me^{2x}=x^2$; $m=x^2e^{-2x}$ Pour m < 0 pas de racines ; Pour m = 0 une racine double ; Pour 0 < m < e^{-2} ; trois racines Pour m = e^{-2} une racine simple et une autre double ; Pour m > e^{-2} une racine.	1

B1	$0 \le x \le 1$, donc $e^{-2}x^n \le x^n e^{-2x} \le x^n$ soit $0 \le x^n e^{-2x} \le x^n$ donc $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx$ ou $0 \le I_n \le \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ soit $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$.	1
B2	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}(x-1)dx \le 0$ car $x^n \ge 0$, $e^{-2x} > 0$ et $x - 1 \le 0$.	1
B3	(I_n) est minorée par 0 et décroissante donc elle est convergente , et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.	0.5
B4	$u = x^{n+1}$ et $v' = e^{-2x}$ donne $u' = (n+1)x^n$ et $v = -0.5e^{-2x}$, $I_{n+1} = \left[-0.5x^{n+1}e^{-2x}\right]_0^1 + 0.5(n+1)I_n = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{e^2} + (n+1)I_n\right]$	1
B5	$h'(x) = -\dfrac{1}{4}\left[2e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x+1)\right] = xe^{-2x}$ donc $I_1 = \int_0^1 xe^{-2x}dx = \left[h(x)\right]_0^1 = \dfrac{1-3e^{-2}}{4}$	1
B6	$A = \int_0^1 x^2 e^{-2x}dx = I_2 = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{e^2} + 2I_1\right] = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1-3e^{-2}}{2}\right] = \dfrac{1-5e^{-2}}{4}u^2$	1
C1	$\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote à la courbe de g.	0.5
C2	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $g(x) = -2x + \ln(x^2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2 + \dfrac{\ln(x^2)}{x}\right) = -2$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x) + 2x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty$ donc il ya une direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = -2x$.	1
C3	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline g'(x) & \| & + & 0 & - & \\ \hline g(x) & \| & \nearrow & -2 & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$	1
C4		1