وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسميّة	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٦ الإستثنائيّة الإثنين ٨ آب ٢٠١٦
عدد المسائل: أربعة	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I. (٤ علامات)

في المستوي الإحداثي المركَّب العائد للنظام $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، تقع النقاط $A(1)$، $M(z)$ وَ $M'(z')$ حيث أنَّ:
$z'=\left(1-i\right)z+i$ بشرط $z\neq 1$.

١) أ- تحقَّق أن: $z'-1=\left(1-i\right)\left(z-1\right)$.

ب- تحقَّق أن $AM'=AM\sqrt{2}$. استنتج أنه عندما تتحرَّك النقطة M على دائرةٍ مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$، فإن النقطة M' تتحرَّك على دائرة (C) يتمّ تحديد مركزها ونصف قطرها.

ج- برهن أنّ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=-\frac{\pi}{4}+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

د- قارن $|z'-z|$ وَ $|z-1|$ ثمّ برهن أنّ المثلث AMM' هو متساوي الساقين وقائم الزاوية.

٢) نفترِض أنّ $z=x+iy$ وَ $z'=x'+iy'$ حيث أن $x,\ y,\ x'$ وَ y' هي أعداد حقيقية.

أ- جد x' وَ y' بدلالة x وَ y.

ب- تحقَّق أنه عندما تتحرّك النقطة M' على المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$، فإنَّ النقطة M تتحرَّك على مستقيم $\left(\Delta\right)$ يتمّ تحديده.

II. (٤ علامات)

في الفضاء الإحداثي العائد للنظام $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعطي:

- المستويَين: $(P): x-2y+z=0$ وَ $(Q): x+y+z+3=0$
- النقطتين $A(1;0;-1)$ و $E(0;-1;-2)$.
- الدائرة (C) التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ والموجودة في المستوي (P).

نسمي المستقيم (Δ) التقاء المستويين (P) وَ(Q).

١) أ- برهن أنّ المستوي (P) متعامد مع المستوي (Q).

ب_ تحقَّق أنّ معادلات المستقيم (Δ) هي $x=-t-2\ ;\ y=-1\ ;\ z=t$ $(t\in\mathbb{R})$

ج- برهن أنّ E هي الإسقاط العامودي للنقطة A على المستقيم (Δ).

د- استنتج أنّ (Δ) هو مماس الدائرة (C) في النقطة E.

٢) لتكن H هي النقطة على المستقيم (Δ) حيث أنّ $x>0$، وَ $EH=3\sqrt{2}$. حدِّد إحداثيات النقطة H.

٣) (T) هو المماس الثاني للدائرة (C) عبر النقطة H ولتكن F هي نقطة التماس . حدِّد معادلات منصِّف الزاوية EHF .

III. (٤ علامات)

صندوق U يحتوي على ٣ مكعبات:

- مكعَّبان حمراوان، كلٌّ منهما مرقَّم الأوجه من ١ الى ٦.
- مكعّب أسود له وجهان يحملان الرقم ٦ والوجوه الأربعة الباقية تحمل الرقم ١.

يسحب لاعبٌ صدفةً وعشوائيًا مكعَّبينٍ من الصندوق ثم يرميهما لمرّةٍ واحدة.
لتكن الأحداث التالية:

A:« المكّعَبان المسحوبان حمراوان».

$\overline{A}$:« أحد المكّعَبان المسحوبان أحمر والثاني أسود».

L:« يظهر الرقم ٦ على مكعب واحد فقط من بين المكّعبين».

١) احسب الاحتمال $P(A)$.

٢) أ- برهن أن $P(L/A)=\dfrac{5}{18}$ ثم احسب $P(A\cap L)$.

ب- احسب $P(\overline{A}\cap L)$ ثم برهن أنّ $P(L)=\dfrac{19}{54}$.

٣) علما أنّ الرقم ٦ ظهر على مكعب واحد فقط من المكعبين، فما احتمال أنّ يكون المكعبين المسحوبين حمراوين؟

٤) أحسب احتمال ظهور الرقم ٦ لمرة واحدة على الاقل.

IV. (٨ علامات)

لتكن f هي الدالَّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=x+xe^{-x}$ وليكن (C) هو بيان هذه الدالّة في المستوى الإحداثي $(O;\vec{i},\vec{j})$

١) حدِّد ($\lim_{x\to+\infty} f(x)$) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم احسب $f(-1.5)$.

٢) ليكن(d) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

أ- ادرس بحسب قِيَم المتغيِّر x موقع البيان (C) بالنسبة للمستقيم (d).

ب- برهن أنّ (d) هي مقارب للبيان(C).

٣) لتكن A هي النقطة على البيان (C) حيث المماس (T) للبيان (C) مواز للمستقيم (d). احسب إحداثيات النقطة A، ثم اكتب معادلة المستقيم (T).

٤) يمثِّل الجدول التالي تغُّير الدالَّة f' حيث أنها مشتقَّة f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	$1-e^{-2}$	↗	1

أ- تحقَّق أن (C) لديها نقطة انعطاف W يتمّ تحديد إحداثيّاتها.

ب- تحقَّق أنّ fهي دالَّة متصاعدة على $\mathbb{R}$ ثم أنشئ جدول التغيّر للدالَّة f .

٥) أرسم (d)، (T) وَ(C).

٦)أ- برهن أنّ الدالَّة f لها دالّة عكسيّة h يتمّ تحديد مجالها.

ب- ارسم البيان (C') العائد للدالَّة h في نفس المستوي للبيان (C).

٧) لتكن M نقطة متغيّرة على البيان (C) احداثيّها الأول x أكبر من أو يساوي صفر، ولتكن N نقطة تناظر M حول المستقيم (d).

أ- احسب MN بدلالة x.

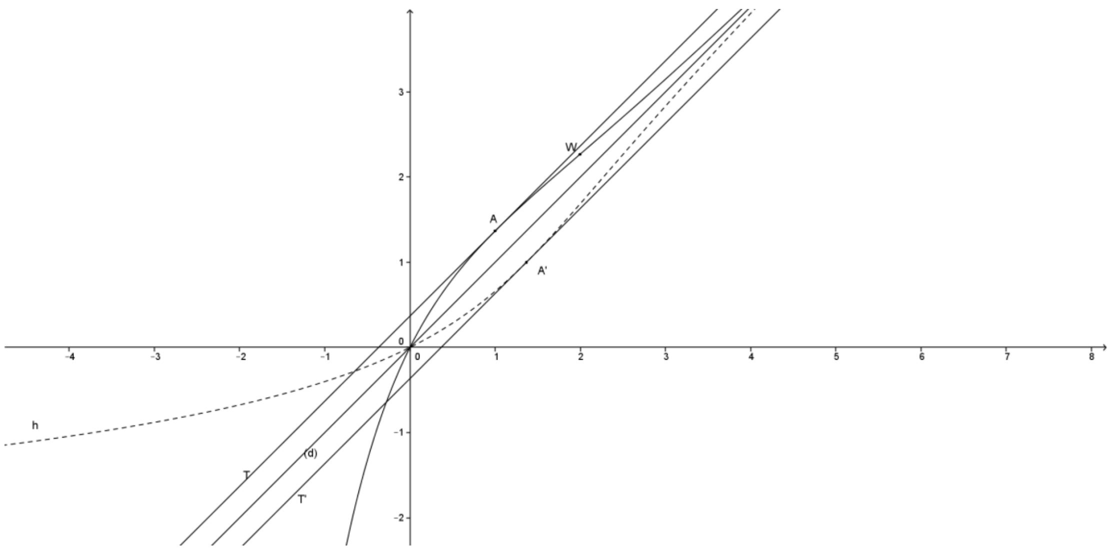
ب- جد القيمة القصوى ل MN .

مشروع معيار التصحيح — مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

I	Solution	M
1a	$z'-1=(1-i)z+i-1$; $z'=(1-i)(z-1)$	0.25
1b	$\lvert z'-1\rvert=\lvert(1-i)(z-1)\rvert=\lvert 1-i\rvert\times\lvert z-1\rvert$ $\lvert z_{M'}-z_A\rvert=\sqrt{2}\lvert z_M-z_A\rvert; AM'=\sqrt{2}AM$ $AM=\sqrt{2}$; $AM'=2$; $M'\in C(A;2)$	1
1c	$\arg\left[z'-1\right]=\arg[(1-i)(z-1)]=\arg(1-i)+\arg(z-1);$ $\arg(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$	1
1d	$\lvert z'-z\rvert=\lvert(1-i)z+i-z\rvert=\lvert -iz+i\rvert=\lvert i\rvert\lvert z-1\rvert=\lvert z-1\rvert;\ \ \arg(z'-z)=\arg[-i(z-1)]$ $\arg(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ then $MAM'=45^{\circ}$ et $\lvert z'-z\rvert=\lvert z-1\rvert; MM'=AM$ Then AMM' is right isosceles at M.	0.75
2a	$x'=x+y$; $y'=y-x+1$	0.5
2b	$x'=y'$; then M moves on the line $(\Delta): x=\frac{1}{2}$	0.5

II	Solution	M
1a	$\overrightarrow{n_{(P)}}(1;-2;1)$ and $\overrightarrow{n_{(P)}}(1;1;1)$; $\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0$	0.5
1b	$-t-2+2+t=0$ then $(\Delta)\subset(P)$; $-t-2-1+t+3=0$ then $(\Delta)\subset(Q)$.	0.5
1c	$\overrightarrow{AE}(-1;-1;-1); \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{V_{(\Delta)}}=0$ and for $t=-2$ $E\in(\Delta)$ so E is the projection of A on (Δ)	0.5
1d	$AE=\sqrt{3}=R;(\Delta)$ is perpendicular to (AE) at E then (Δ) is the tangent to (C) at E.	0.5
2	$H(-t-2;-1;t); EH=3\sqrt{2}; EH=\sqrt{2(t+2)^2}$; $t=1$ not accepted. $t=-5$ accepted $\Rightarrow H(3;-1;-5)$	1
3	$(AH):\begin{cases}x=2m+1\\ y=-m\\ z=-4m-1\end{cases}$	1

III	Solution	M
1	$p(A)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$	0.5
2a	$p(L/A)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times 2=\frac{5}{18}$; $P(A\cap L)=p(L/A)\times p(A)=\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{54}$	1
2b	$p(\overline{A}\cap L)=p(L/\overline{A})\times p(\overline{A})=\frac{2}{3}(\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{6})=\frac{14}{54}$ $p(L)=p(A\cap L)+p(\overline{A}\cap L)=\frac{5}{54}+\frac{14}{54}=\frac{19}{54}$	1.25
3	$p(A/L)=P\frac{(A\cap L)}{p(L)}=\frac{5}{19}$	0.5
4	$1-p(\text{none of the two dice shows } 6)=1-\left[\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\right)\right]=\frac{43}{108}$. Or $p(L)+p(\text{two dice show the number } 6)=\frac{19}{54}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{43}{108}$	0.75

IV	Solution	M
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty-\infty=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+0=+\infty$; $f(-1,5)\approx -8.22$,	0.75
2a	$f(x)-x = xe^{-x}$ $x>0;(C)$ is above (d) $x=0;(C)$ cuts (d) $x<0;(C)$ is below (d)	0.5
2b	$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ then the line (d): y=x is an asymptote.	0.5
3	$f'(x)=1;\ 1+e^{-x}-xe^{-x}=1; x=1; A(1;1+e^{-1})$ $(T): y=x+e^{-1}$	1
4a	$f''(x)=0$ for $x=2$ and f'' changes sign. Then $W(2;2+2e^{-2})$ is a point of inflection to (C).	0.5
4b	f' admits an absolute minimum equals to $1-e^{-2}\approx 0,8>0$ then f is strictly increasing. $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$	0.5
5		1
6a	f is continuous and strictly increasing over $\mathbb{R}$,then it admits an inverse functiuon h $D_h=]-\infty;+\infty[$	0.5
6b	(C') is the symmetric of (C) with respect to (d).	1
7a	$M(x;x+xe^{-x}); N(x+xe^{-x};x); MN=\sqrt{2}xe^{-x}$	1
7b	$MN=\sqrt{2}xe^{-x}=g(x)$ $g'(x)=0; \sqrt{2}e^{-x}(1-x)=0;$ for $x=1; MN=\sqrt{2}e^{-1}$ is the maximum value	0.75