وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسميّة	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائيّة الإثنين ٨ آب ٢٠١٦
عدد المسائل: أربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne les points A(1), M(z) et M'(z')

tels que : $z'=(1-i)z+i$ avec $z\neq 1$.

1) a- Vérifier que $z'-1=(1-i)(z-1)$.

b- Vérifier que $AM'=AM\sqrt{2}$. Déduire que si M varie sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

c- Prouver que $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=-\dfrac{\pi}{4}+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

d- Comparer $|z'-z|$ et $|z-1|$ puis montrer que le triangle AMM' est rectangle isocèle.

2) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $x,\ y,\ x'$ et y' sont des réels.

a- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

b- Vérifier que si M' se déplace sur la droite (D) d'équation $y=x$, alors M se déplace sur une droite (Δ) à déterminer.

II- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne :

- Le plan $(P): x-2y+z=0$ et le plan $(Q): x+y+z+3=0$;
- Les points $A(1;0;-1)$ et $E(0;-1;-2)$;
- Dans le plan (P), le cercle (C) de centre A et de rayon $R=\sqrt{3}$.

Soit (Δ) la droite d'intersection de (P) et (Q).

1) a- Montrer que (P) est perpendiculaire à (Q).

b- Vérifier que la droite (Δ) est définie par: $x=-t-2$; $y=-1$; $z=t$ ($t\in\mathbb{R}$).

c- Montrer que E est le projeté orthogonal de A sur (Δ).

d- Déduire que (Δ) est tangente en E à (C).

2) Soit H le point de (Δ) d'abscisse positive telle que $EH=3\sqrt{2}$. Déterminer les coordonnées de H.

3) Soit (T) la deuxième tangente menée de H à (C) et F le point de tangence de (T) et (C).

Déterminer un système d'équations paramétriques d'une bissectrice de l'angle $\widehat{EHF}$.

III- (4 points)

On dispose d'une urne U contenant trois dés:

- **DEUX** dés rouges, dont les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.
- **UN** dé noir, dont **deux** faces sont numérotées 6 et les **quatre** autres sont numérotées 1.

Un joueur tire au hasard et simultanément deux dés de l'urne puis les lance une seule fois.

On considère les évènements suivants:

A : « Tirer deux dés rouges ».

$\overline{A}$: « Tirer deux dés un rouge et un noir ».

L : « Obtenir exactement une seule face numérotée 6 ».

1) Calculer la probabilité P(A).
2) a- Vérifier que $P(L/A) = \dfrac{5}{18}$ et calculer $P(A \cap L)$.

   b- Calculer $P(\overline{A} \cap L)$ et vérifier que $P(L) = \dfrac{19}{54}$.
3) Sachant qu'on a obtenu exactement une seule face numérotée 6, calculer la probabilité d'avoir tiré deux dés rouges.
4) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une face numérotée 6.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + xe^{-x}$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculer $f(-1{,}5)$.
2) Soit (d) la droite d'équation $y = x$.

   a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

   b- Démontrer que (d) est une asymptote à (C).
3) A est le point de (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (d). Déterminer les coordonnées de A et écrire une équation de (T).
4) Le tableau ci-dessous, est le tableau de variations de la fonction f' dérivée de f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	1

   a- Vérifier que (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.

   b- Vérifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f.
5) Tracer (d), (T) et (C).
6) a- Démontrer que f admet une fonction réciproque h dont on déterminera le domaine de définition.

   b- Tracer la courbe (C') de h dans le même repère que (C).
7) Soit M un point quelconque de (C) d'abscisse $x \geq 0$ et N le symétrique de M par rapport à (d).

   a- Calculer MN en fonction de x.

   b- Calculer la valeur maximale de MN.

وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: علوم الحياة

دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائية
الاثنين ٨ آب ٢٠١٦

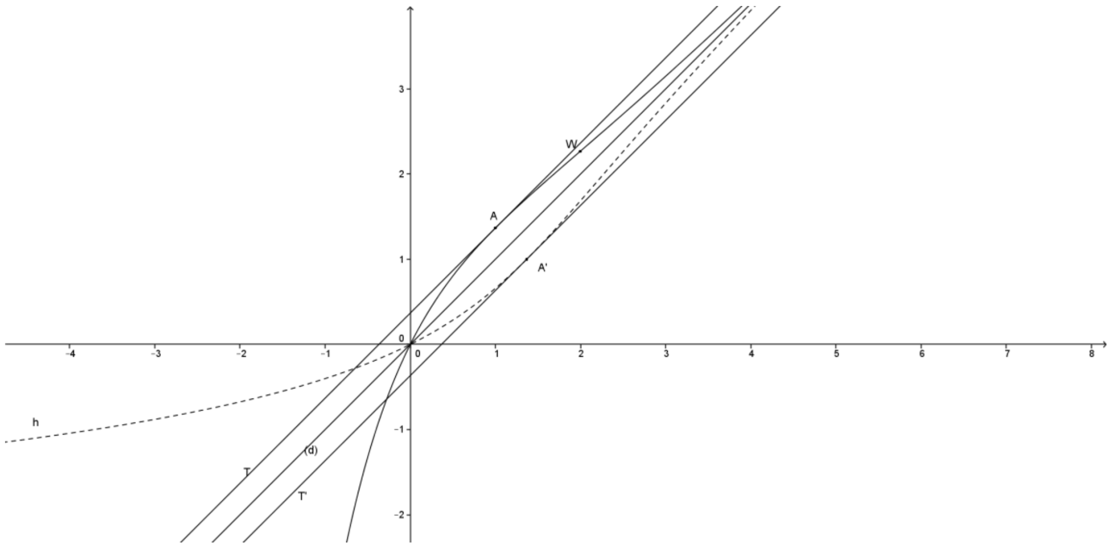
مشروع معيار التصحيح

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

I	Solutions	Notes
1a	$z'-1=(1-i)z+i-1$; $z'=(1-i)(z-1)$	0,25
1b	$\lvert z'-1\rvert=\lvert(1-i)(z-1)\rvert=\lvert 1-i\rvert\times\lvert z-1\rvert$ $\lvert z_{M'}-z_A\rvert=\sqrt{2}\lvert z_M-z_A\rvert ; AM'=\sqrt{2}AM$ $AM=\sqrt{2}$; $AM'=2$; $M'\in C(A;2)$	1
1c	$\arg[z'-1]=\arg[(1-i)(z-1)]=\arg(1-i)+\arg(z-1)+2k\pi;$ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})+2k\pi$	1
1d	$\lvert z'-z\rvert=\lvert(1-i)z+i-z\rvert=\lvert -iz+i\rvert=\lvert i\rvert\lvert z-1\rvert=\lvert z-1\rvert$ alors $MM'=AM$ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ donc $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{4}$ et $MAM'=45^\circ$, et comme $MM'=AM$ donc AMM’ est un triangle rectangle isocèle en M.	0,75
2a	$x'=x+y$; $y'=y-x+1$	0,5
2b	$x'=y'$; $x=\frac{1}{2}$ M se déplace sur la droite d’équation $x=\frac{1}{2}$.	0,5

II	Solutions	Notes
1a	$\overrightarrow{n_P}(1;-2;1)$ et $\overrightarrow{n_Q}(1;1;1)$; $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$	0,5
1b	$-t-2+2+t=0$ donc $(\Delta)\subset(P)$; $-t-2-1+t+3=0$ donc $(\Delta)\subset(Q)$	0,5
1c	$\overrightarrow{AE}(-1;-1;-1);\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{V_\Delta}=0$ et pour $t=-2$ $E\in(\Delta)$	0,5
1d	$AE=\sqrt{3}=R;(\Delta)\subset(P)$ et (Δ) est perpendiculaire a (AE) en E, (Δ) tangente à (C) en E	0,5
2	$H(-t-2;-1;t);EH=3\sqrt{2};EH=\sqrt{2(t+2)^2}$; $t=1$ inacc. $t=-5$; $H(3;-1;-5)$	1
3	$(AH):\begin{cases}x=2m+1\\y=-m\\z=-4m-1\end{cases}$	1

III	Solutions	Notes
1	$p(A)=\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{1}{3}$	0,5
2a	$p(L/A)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times2=\frac{5}{18}$; $P(A\cap L)=p(L/A)\times p(A)=\frac{5}{18}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{54}$	1
2b	$p(\overline{A}\cap L)=p(L/\overline{A})\times p(\overline{A})=\frac{2}{3}(\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{6})=\frac{14}{54}$ $p(L)=p(A\cap L)+p(\overline{A}\cap L)=\frac{5}{54}+\frac{14}{54}=\frac{19}{54}$	1,25
3	$p(A/L)=P\frac{(A\cap L)}{p(L)}=\frac{5}{19}$	0,5
4	$1-p(\text{obtenir aucune face numérotée } 6)=1-\left[\left(\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\right)\right]=\frac{43}{108}$ ou $p(L)+p(\text{obtenir deux faces numérotées } 6)=\frac{19}{54}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{43}{108}$	0,75

IV	Solutions	Notes
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty-\infty=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+0=+\infty$; $f(-1,5)\approx -8.22$	0,75
2a	$f(x)-x=xe^{-x}$ si $x>0;(C)$ est au-dessus de (d) si $x=0;(C)$ coupe (d) si $x<0;(C)$ est au-dessous de (d)	0,5
2b	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ donc (d) est une asymptote à (C).	0,5
3	$f'(x)=1;\ 1+e^{-x}-xe^{-x}=1; x=1; A(1;1+e^{-1})$ $(T): y=x+e^{-1}$	1
4a	f'' s'annule pour $x=2$ en changeant de signe donc $W(2;2+2e^{-2})$ est un point d'inflexion de (C).	0,5
4b	f' admet un minimum égale à $1-e^{-2}\approx 0,8>0$ donc f est strictement croissante sur IR. $\begin{array}{l l l} x & -\infty & +\infty \\ \hline f'(x) & + & \\ \hline f(x) & -\infty \nearrow & +\infty \end{array}$	0,5
5		1
6a	f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc admet une fonction réciproque h. $D_h=]-\infty;+\infty[$	0,5
6b	(C') symétrique de (C) par rapport à (d).	1
7a	$M(x;x+xe^{-x}); N(x+xe^{-x};x); MN=\sqrt{2}xe^{-x}$	1
7b	$MN=\sqrt{2}xe^{-x}=g(x);\ g'(x)=0; \sqrt{2}e^{-x}(1-x)=0$ pour x=1 g admet un maximum égal à $\sqrt{2}e^{-1}$ donc la valeur maximale de MN est $\sqrt{2}e^{-1}$.	0,75