ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Le prix initial d'une voiture est 15 000 000 LL.
Le tableau suivant donne le prix y_i exprimé en millions de LL de cette voiture, après x_i années d'utilisation.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	15	14	13,5	11	10	8,5	7

1) Représenter graphiquement le nuage de points (x_i ; y_i) ainsi que le point moyen G ($\overline{X}$; $\overline{Y}$) dans un repère orthogonal.
2) Déterminer une équation de la droite de régression $D_{y/x}$ de y en fonction de x; tracer cette droite dans le repère précédent.
3) Trouver le coefficient de corrélation linéaire r et donner une interprétation de la valeur ainsi obtenue.
4) Quel est le pourcentage de diminution du prix initial après quatre années d'utilisation ?
5) On suppose que le modèle du tableau précédent reste valide jusqu'à 10 ans d'utilisation.
Estimer le nombre d'années d'utilisation pour que le prix de cette voiture devienne, pour la première fois, plus petit ou égal à 5 000 000 LL.

II- (4 points)

Un centre de vacances propose aux touristes deux activités sportives : la natation et le tennis.
Un touriste peut choisir une seule de ces deux activités, comme il peut ne rien choisir.
Parmi les touristes qui passent une semaine de vacances dans ce centre :

- 40% sont des hommes.
- Parmi les hommes, 50% pratiquent le tennis et 10% ne pratiquent aucun sport.
- Parmi les femmes, 60% pratiquent la natation et 20% ne pratiquent aucun sport.

On interroge au hasard un touriste de ce centre et on considère les évènements suivants :
H : « Le touriste est un homme » ; F : « Le touriste est une femme »
N : « Le touriste pratique la natation » ; T : « Le touriste pratique le tennis »
R : « Le touriste ne pratique aucun sport » .

1) Calculer la probabilité $P(H \cap N)$ et vérifier que $P(N) = 0,52$.
2) Le touriste interrogé ne pratique pas la natation, quelle est la probabilité qu'il soit une femme ?
3) Un groupe de touristes vient passer une semaine dans ce centre. Un touriste doit payer une cotisation de 750 000 LL avec un supplément de 100 000 LL pour le tennis et un supplément de 50 000 LL pour la natation.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme qu'un touriste doit payer pour passer une semaine de vacances dans ce centre.
a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Calculer la somme moyenne payée par un touriste pour une semaine de vacances.
c- Sachant que la somme payée par le touriste pour une semaine de vacances est inférieure à 830 000 LL, quelle est la probabilité que le touriste choisi soit un homme qui ne pratique aucun sport ?

III- (4 points)

Deux salles de cinémas **A** et **B** programment chaque Samedi soir de 8h à 10h deux films différents.
Chaque spectateur assiste à l'un des deux films.
Un même groupe de spectateurs fréquente ces deux salles toutes les semaines.
85% des spectateurs qui assistent au film de la salle **A** et 10% des spectateurs qui assistent au film de la salle **B** une semaine, vont assister au film de la salle **A** la semaine suivante.
La première semaine, 70% de ces spectateurs assistent au film de la salle **A**.
On note par a_n et b_n les proportions respectives des spectateurs des salles **A** et **B** durant la n ième semaine.
Ainsi $a_1 = 0,7$; $b_1 = 0,3$ et pour tout entier naturel non nul n, $a_n + b_n = 1$.

1) Vérifier que $a_2 = 0,625$.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1$.

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n - 0,4$.

a- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- En déduire que $a_n = 0,4 + 0,3\times(0,75)^{n-1}$.

4) **a-** Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.

b- La proportion des spectateurs de la salle **A** peut-elle devenir inférieure à 0,3 ? Justifier la réponse.

IV- (8 points)

A-

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + (8x-4)e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2) Vérifier que $f'(x) = 16(1-x)e^{-2x}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Sachant que (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0,28.

a- Tracer la courbe (C).

b- Déduire, suivant les valeurs de x, le signe de f(x).

B-

Une usine qui fabrique chaque jour une quantité x d'un produit exprimé en centaines de kg, estime que le coût total de production est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0,8x + 1 + 4xe^{-2x}$ où $C(x)$ est exprimé en millions LL et $0 \le x \le 6$.
La production est vendue en totalité au prix de 18 000 LL le kg.

1) Démontrer que le profit est donné par $P(x) = x - 1 - 4xe^{-2x}$.

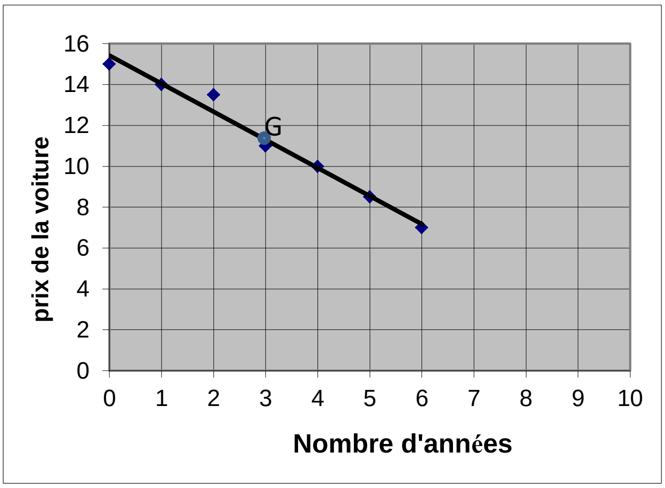
2) Vérifier que $P'(x) = f(x)$ et dresser le tableau de variations de P.

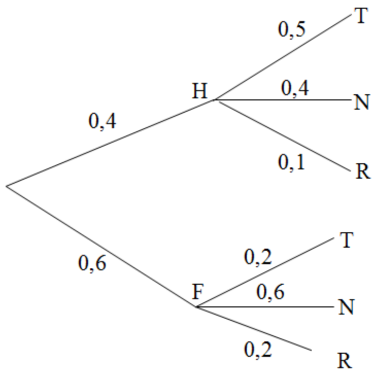
3) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique α. Vérifier que $\alpha \in [1,35 ; 1,37]$.

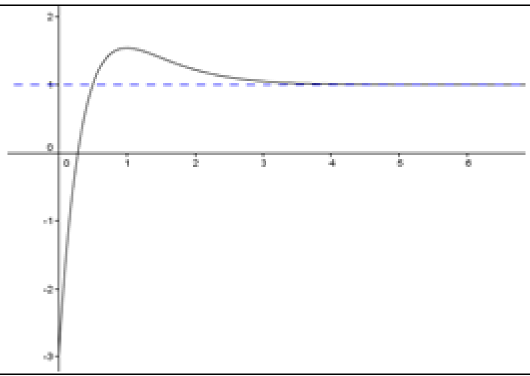
4) On prend $\alpha = 1,36$. Déterminer le seuil de rentabilité de l'usine.

5) Trouver, en kg, la quantité du produit pour laquelle le coût marginal est égal à 1,8 millions LL.

وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسميّة	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: الاقتصاد والاجتماع	دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائية السبت ٦ آب ٢٠١٦
مشروع معيار التصحيح	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	

I	Solutions	Note
1	$\overline{X} = 3$ et $\overline{Y} = 11{,}286$. 	1,5
2	$a = -1{,}375$ et $b = 15{,}4107$. $D_{y/x}$: $y = -1{,}375x + 15{,}41$.	1,5
3	$r = -0{,}9907$ donc il y a une forte corrélation négative entre x et y.	1,5
4	$\frac{10-15}{15} \times 100 = -33{,}34\%$ alors la diminution est de 33,34%	1
5	$y \leq 5$; donc $-1{,}375x + 15{,}41 \leq 5$ alors $x \geq 7{,}5$. Alors après 8 ans le prix de vente devient inférieur ou égal à 5 000 000 LL pour la première fois.	1,5

<table>
<tr><th>II</th><th>Solutions</th><th>Note</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$P(H \cap N) = P(N / H) \times P(H) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.
$P(N) = P(N \cap H) + P(N \cap F) = 0{,}16 + 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}52$
</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P(F/\overline{N}) = \frac{P(F \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} = \frac{P(F) - P(F \cap N)}{1 - P(N)} = \frac{0{,}6 - 0{,}36}{1 - 0{,}52} = 0{,}5$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>$P(X = 750\,000) = P(R) = P(R \cap H) + P(R \cap F) = 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}16$
$P(X = 800\,000) = P(N) = 0{,}52$
$P(X = 850\,000) = P(T) = P(T \cap H) + P(T \cap F) = 0{,}5 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}32$
<table>
<tr><td>$X = x_i$</td><td>750 000</td><td>800 000</td><td>850 000</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0,16</td><td>0,52</td><td>0,32</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>$E(X) = 750\,000 \times 0{,}16 + 800\,000 \times 0{,}52 + 850\,000 \times 0{,}32 = 808\,000$.
La somme moyenne est : 808 000 LL</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>$P\big((H \cap R)/(\leq 830\,000)\big) = \frac{P(H \cap R)}{P(N) + P(R)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}4}{0{,}52 + 0{,}16} = \frac{1}{17}$</td><td>1,5</td></tr>
</table>

III	Solutions	Note
1	$a_2 = 0,85a_1 + 0,1b_1 = 0,85 \times 0,7 + 0,1 \times 0,3 = 0,625$	1
2	$a_{n+1} = 0,85a_n + 0,1b_n = 0,85a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,75a_n + 0,1.$	1
3a	$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,75a_n + 0,1 - 0,4 = 0,75 \times a_n - 0,3 = 0,75(a_n - 0,4) = 0,75u_n.$ La suite (u_n) est géométrique de raison q = 0,75 et de 1er terme $u_1 = 0,7 - 0,4 = 0,3.$	2
3b	$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,3 \times (0,75)^{n-1}$ et $a_n = u_n + 0,4 = 0,3 \times (0,75)^{n-1} + 0,4$	1
4a	$a_{n+1} - a_n = (0,4 + 0,3 \times 0,75^n) - (0,4 + 0,3 \times 0,75^{n-1}) = -0,075 \times 0,75^{n-1} < 0$ alors (a_n) est décroissante.	1
4b	$a_n < 0,3$; $0,3 \times (0,75)^{n-1} + 0,4 < 0,3$; $0,3 \times (0,75)^{n-1} < -0,1$ impossible; alors la proportion des spectateurs de la salle A ne peut pas devenir inférieure à 0,3 **OR** La suite (a_n) est décroissante, mais sa limite est 0,4, alors le minimum est 0,4 .	1
IV	**Solutions**	**Note**
A1	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, y = 1 est l'équation de l'asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$	1
A2	$f'(x) = 8e^{-2x} - 2(8x - 4)e^{-2x}$ $= 16(1 - x)e^{-2x}$. $\begin{array}{cccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -3 & \nearrow & 1,54 & \searrow & 1 \end{array}$	2
A3a		2
A3b	f(x) < 0 for 0 £ x < 0,28. f(x) > 0 for x > 0,28. f(x) = 0 for x = 0,28.	1
B1	$R(x) = \frac{18000 \times x \times 100}{1000000} = 1,8x$ $P(x) = R(x) - C(x) = 1,8x - 0,8x - 1 - 4xe^{-2x} = x - 1 - 4xe^{-2x}$	2
B2	$P'(x) = 1 - 4e^{-2x} + 8xe^{-2x}$ $= 1 + (8x - 4)e^{-2x}$ $= f(x)$. $\begin{array}{cccccc} x & 0 & & 0,2 & & 6 \\ \hline P'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline P(x) & -1 & \searrow & -1,36 & \nearrow & 4,99 \end{array}$	1,5
B3	Sur l'intervalle [0 ; 0,28]: P(x) = 0 n'a pas de solutions car le maximum of P(x) est –1 < 0 Sur l'intervalle [0,28 ; 6]: P est continue, P est strictement croissante de –1,36 jusqu'à +4.99. Alors l'équation P(x) = 0 admet une unique racine α. Or P(1,35) × P(1,37) = –0,01 × 0,016 < 0, alors $\alpha \in [1,35 ; 1,37]$.	2
B4	Le seuil de rentabilité est atteint pour P(x) = 0 donc x = α = 1,36 soit 136 kg.	1
B5b	$C_m(x) = 1,8$ P(x) = R(x) – C(x), alors P '(x) = 1,8 – C '(x) = 1,8 – $C_m(x)$ = 1,8 – 1,8 = 0; pour x = 0,28 La quantité produite pour que le coût marginal soit 1,8 millions LL est 28 kg	1,5