وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسميّة

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: الاقتصاد والاجتماع

دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائية
السبت ٦ آب ٢٠١٦

عدد المسائل: اربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (أربع علامات)

السعر الأساسي لإحدى السيارات 15 000 000 ليرة لبنانية.
يبين الجدول التالي سعر المبيع y_i بملايين الليرات اللبنانية بعد x_i سنة من الاستخدام.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	15	14	13.5	11	10	8.5	7

١) مثّل بيانيًا تشتّت النقاط $(x_i\,;\,y_i)$ وكذلك مركز الثقل $G(\overline{X},\overline{Y})$ في المستوي الإحداثي.
٢) حدّد معادلة الانحدار الخطي $D_{y/x}$ للمتغيِّر y بدلالة x. أرسم هذا المستقيم في المستوي الإحداثي السابق.
٣) جِدْ معامل الترابط الخطّي r وأعط تفسيرًا للقيمة التي حصلت عليها.
٤) ما النسبة المئوية للخسارة في السعر الأساسي بعد مرور أربع سنوات على الشراء؟
٥) لنفترض أن النموذج المعطى في الجدول أعلاه يستمرّ صالحًا لغاية ١٠ سنوات من الاستخدام. قدّر سنوات الاستخدام لكي يصبح سعر المبيع أصغر من أو يساوي 5 000 000 ل.ل. في المرة الأولى.

II- (أربع علامات)

يعرض أحد المراكز الترفيهية على السائحين نشاطيْن رياضيين اختياريين: السباحة وكرة المضرب.
يمكن للسائح أن يختار نشاطًا واحدًا فقط، كما يمكن له أن لا يختار أي نشاط.
من بين السائحين الذين أمضوا أسبوعًا في المركز،

- 40% هم من الرجال
- من الرجال، 50% يمارسون كرة المضرب و 10% لا يمارس أيَّة رياضة.
- من النساء، 60% يمارسن السباحة، و 20% لا يمارسن أية رياضة.

تمَّت مقابلة أحد السائحين صدفة. نعرّف الأحداث التالية:

M: "السائح الذي قابلناه رجل" ؛ W: "السائح الذي قابلناه امرأة"
S: "السائح الذي قابلناه يمارس السباحة" ؛ T: "السائح الذي قابلناه يمارس كرة المضرب"
R: "السائح الذي قابلناه لا يمارس أية رياضة"

١) احسب الاحتمال $P(M \cap S)$ وتحقّق أن $P(S) = 0.52$.
٢) علمًا أن السائح الذي تمّت مقابلته لا يمارس السباحة، ما احتمال أن يكون امرأة؟
٣) أمضت مجموعة من السائحين أسبوعًا في المركز. يتوجب على كل سائح أن يدفع مبلغ 750 000 ل.ل. بدل اشتراك، بالإضافة إلى مبلغ 100 000 ل.ل. للمشتركين في كرة المضرب ومبلغ 50 000 ل.ل. للمشتركين في السباحة.
لتكن X المتغيِّرة العشوائية المساوية للقيمة التي يدفعها السائح لقاء قضاء أسبوع في المركز.
أ) جِدْ التوزيع الاحتمالي للمتغيرة X.
ب) جِدْ متوسط القيمة المتوجب على كل سائح أن يدفعها في أسبوع.
ج) علمًا أن القيمة المدفوعة من أحد السائحين تقلّ عن 830 000 ل.ل.، فما احتمال أن يكون السائح المختار رجلًا لا يمارس أية رياضة؟

III- (أربع علامات)

تعرض صالتي سينما A و B عرضين مختلفين مساء كل سبت من الثامنة حتى العاشرة.
يحضر المشاهد عرضًا واحدًا فقط من العرضين.
تزور المجموعة نفسها صالتي العرض كل الأسابيع.
85% من مشاهدي عرض الصالة A و 10% من مشاهدي عرض الصالة B سيشاهدون العرض في الصالة A في الأسبوع التالي.
في الأسبوع الأول، حضر 70% من المشاهدين العرض في الصالة A.
نرمز بـِ a_n و b_n إلى نسب المشاهدين في الصالتين A و B خلال الـ nth أسبوع.
وهكذا، فإن $a_1 = 0.7$، $b_1 = 0.3$، و $a_n + b_n = 1$ لكلّ عدد طبيعي n مختلف عن الصفر.

١) تحقَّق أن $a_2 = 0.625$

٢) لكلِّ عدد طبيعي n مختلف عن الصفر، برهن أن $a_{n+1} = 0.75a_n + 0.1$

٣) لتكن (u_n) المتتالية المعرَّفة كما يلي: $u_n = a_n - 0.4$.

أ) برهن أن (u_n) متتالية هندسية وحدّد نسبتها الثابتة وحدَّها الأول.

ب) استنتج أن $a_n = 0.4 + 0.3 \times (0.75)^{n-1}$.

٤) أ) برهن أن المتتالية (a_n) تنازلية.

ب) هل يمكن أن تصبح نسبة مشاهدي الصالة A أقل من 0.3؟ برّر إجابتك.

IV- (ثماني علامات)

A-

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي $f(x) = 1 + (8x-4)e^{-2x}$ وليكن (C) بيان هذه الدالة في المستوي الإحداثي $(O; \vec{i}, \vec{j})$

١) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ واستنتج مُقاربًا للبيان (C).

٢) تحقق أن $f'(x) = 16(1-x)e^{-2x}$ وانشئ جدول التغير للدالة f.

٣) نعلم أن البيان (C) يتقاطع مع المحور x في النقطة ذات الإحداثي 0.28.

أ) ارسم البيان (C).

ب) استنتج إشارة f(x) بحسب قيم x.

B-

ينتج أحد المصانع كمية x من منتج ما، حيث أن $0 \le x \le 6$. تمثل القيمة الإجمالية لهذا المنتج بالدالة $C(x) = 0.8x + 1 + 4xe^{-2x}$، (x بمئات الكيلوغرامات وC(x) بملايين الليرات اللبنانية).
لنفترض أن الإنتاج قد بيعَ بكامله بسعر 18 000 ل.ل. للكيلوغرام الواحد.

١) برهن أن دالة الربح تمثل كما يلي: $P(x) = x - 1 - 4xe^{-2x}$.

٢) تحقَّق أن $P'(x) = f(x)$ وانشئ جدول التغير للدالة P.

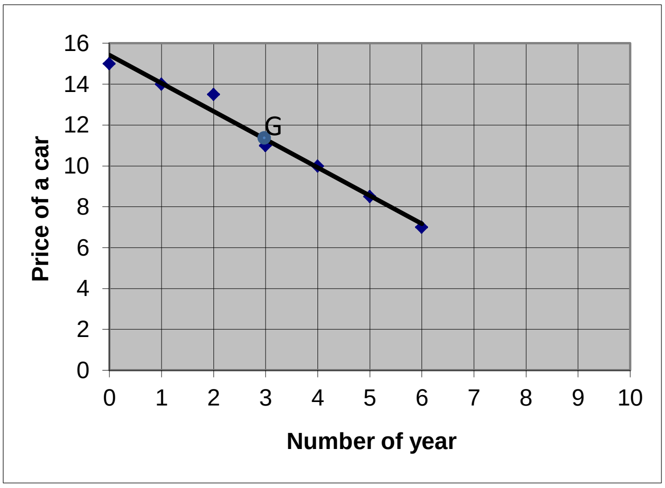
٣) برهن أن المعادلة $P(x) = 0$ لها حل وحيد α ، وتحقق أن α في $[1.35 ; 1.37]$.

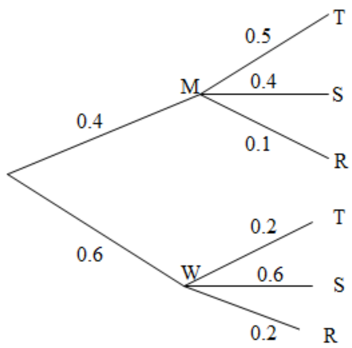
٤) نفترض الآن أن α = 1.36. جد كمية إنتاج الشركة حيث لا يوجد ربح ولا خسارة في المصنع.

٥) احسب بالكيلوغرام كمية إنتاج المصنع بحيث أن الكلفة الهامشية تساوي 1.8 مليون ليرة لبنانية.

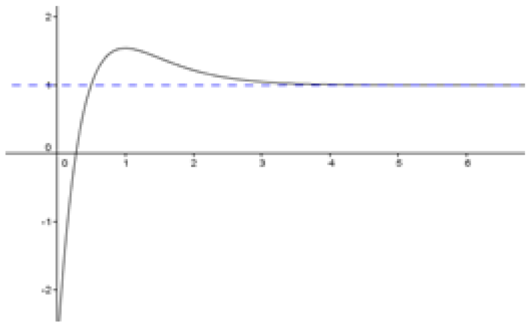
وزارة التربية والتعليم العالي　　　　　امتحانات الشهادة الثانوية العامة　　　　　دورة العام ٢٠١٦ الاستثنائية
المديرية العامة للتربية　　　　　فرع: الاقتصاد والاجتماع　　　　　السبت ٦ آب ٢٠١٦
دائرة الامتحانات الرسميّة

مشروع معيار التصحيح　　　　　مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

I		Mark
1	$\overline{X} = 3$ and $\overline{Y} = 11.286$. 	1.5
2	$a = -1.375$ and $b = 15.4107$. $D_{y/x}$: $y = -1.375x + 15.41$.	1.5
3	$r = -0.9907$ there is a strong negative correlation between x and y.	1.5
4	$\frac{10-15}{15}\times 100 = -33.34\%$. Hence the percentage decrease is 33.34%	1
5	$y \le 5$ gives $-1.375x + 15.41 \le 5$. We get $x \ge 7.5$. Hence after 8 years the selling price becomes less than or equal to 5 000 000 LL for the first time.	1.5

<table>
<tr><th>II</th><th>Answer</th><th>Mark</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$P(M\cap S) = P(S / M) \times P(M) = 0.4 \times 0.4 = 0.16.$
$P(S) = P(S \cap M) + P(S \cap W) = 0.16 + 0.6 \times 0.6 = 0.52$
</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P(W/\overline{S}) = \frac{P(W\cap\overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(W)-P(W\cap S)}{P(\overline{S})} = \frac{0.6-0.36}{1-0.52} = 0.5$</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>$P(X = 750\,000) = P(R) = P(R\cap M) + P(R\cap W) = 0.4\times0.1 + 0.2\times0.6 = 0.16$
$P(X = 800\,000) = P(S) = 0.52$ R
$P(X = 850\,000) = P(T) = P(T\cap M) + P(T\cap W) = 0.5\times0.4 + 0.2\times0.6 = 0.32$
<table>
<tr><td>$X = x_i$</td><td>750 000</td><td>800 000</td><td>850 000</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>0.16</td><td>0.52</td><td>0.32</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>$E(X) = 750\,000 \times 0.16 + 800\,000 \times 0.52 + 850\,000 \times 0.32 = 808\,000.$
The average amount paid by a tourist during one week is 808 000 LL</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>$P\big((M\cap R)/(\le 830\,000)\big) = \frac{P(M\cap R)}{P(S)+P(R)} = \frac{0.1\times0.4}{0.52+0.16} = \frac{1}{17}$</td><td>1.5</td></tr>
</table>

III	Answers	Mark
1	$a_2 = 0.85a_1 + 0.1b_1 = 0.85\times 0.7 + 0.1\times 0.3 = 0.625$	1
2	$a_{n+1} = 0.85a_n + 0.1b_n = 0.85a_n + 0.1(1-a_n) = 0.75a_n + 0.1$.	1
3a	$u_{n+1} = a_{n+1} - 0.4 = 0.75a_n + 0.1 - 0.4 = 0.75\times a_n - 0.3 = 0.75(a_n - 0.4) = 0.75u_n$. The sequence (u_n) is geometric with common ratio r = 0.75 and first term $u_1 = 0.7 - 0.4 = 0.3$.	2
3b	$u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0.3\times(0.75)^{n-1}$ and $a_n = u_n + 0.4 = 0.3\times(0.75)^{n-1} + 0.4$	1
4a	$a_{n+1} - a_n = (0.4 + 0.3\times 0.75^n) - (0.4 + 0.3\times 0.75^{n-1}) = -0.075\times 0.75^{n-1} < 0$ hence (a_n) is decreasing.	1
4b	$a_n < 0.3$; $0.3\times(0.75)^{n-1} + 0.4 < 0.3$; $0.3\times(0.75)^{n-1} < -0.1$ which is impossible; thus the ratio of spectators in cinema A will not be less than 0.3 **OR** The sequence (a_n) is decreasing but its limit is 0.4, hence the minimum is 0.4 .	1

IV	Answer	Mark
A1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, y = 1 is the equation of a horizontal asymptote .	1
A2	f ´(x) = $8e^{-2x} - 2(8x-4)\,e^{-2x}$ = $16(1-x)\,e^{-2x}$. $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & -3 & \nearrow & 1.54 & \searrow & 1 \end{array}$	2
A3a		2
A3b	f(x) < 0 for 0 £ x < 0.28. f(x) > 0 for x > 0.28. f(x) = 0 for x = 0.28.	1
B1	$R(x) = \dfrac{18000\times x\times 100}{1000000} = 1.8x$ $P(x) = R(x) - C(x) = 1.8x - 0.8x - 1 - 4xe^{-2x} = x - 1 - 4xe^{-2x}$	2
B2	P´(x) = $1 - 4e^{-2x} + 8xe^{-2x}$ = $1 + (8x-4)\,e^{-2x}$ = f(x). $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 0.28 & & 6 \\ \hline P'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline P(x) & -1 & \searrow & -1.36 & \nearrow & 4.9 \end{array}$	1.5
B3	On the interval [0 ; 0.28]: P(x) = 0 has no solution since the maximum of P(x) is –1 < 0 On the interval [0.28 ; 6]: P is continuous, P is strictly increasing from –1.36 to +4.99. Thus the equation P(x) = 0 has a unique root α. P(1.35) × P(1.37) = –0.01 × 0.016 < 0, α ∈ [1.35 ; 1.37].	2
B4	The break even is attained when P(x) = 0; x = α = 1.36 The break even quantity of the factory is 136 kg.	1
B5b	$M_C(x) = 1.8$ P(x) = R(x) – C(x), then P '(x) = 1.8 – C '(x) = 1.8 – $M_C(x)$ = 1.8 – 1.8 = 0; x = 0.28 The quantity produced so that the marginal cost is 1.8 million LL is 28 kg	1.5