| الدورة العادية الاستكمالية للعام 2011 | امتحانات الشهادة الثانوية العامة<br>الفرع : علوم الحياة | وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات |
|---|---|---|
| الاسم:<br>الرقم: | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة ساعتان | عدد المسائل: اربع |

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

**I- (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points

A (1;–1;1), B (–2 ; 2 ; 1), I $\left(\frac{1}{2};\,-\frac{1}{2};\,1\right)$ et la droite (d) définie par : $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$ (t est un réel).

1) Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

2) Démontrer que (AB) et (d) se coupent en I.

3) Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par (d) et (AB) est $x + y + z - 1 = 0$.

4) On considère le point H$\left(2;\,1;\,\frac{5}{2}\right)$.

a- Montrer que I est le projeté orthogonal de H sur (P).
b- Vérifier que (AB) et (d) sont perpendiculaires.
c- K est un point de (d) tel que IK = IA. Calculer le volume du tétraèdre HABK.

**II- (4 points)**

Une urne contient 4 boules noires, 3 boules blanches et n boules rouges. ($n \geq 2$)

**A-**
Dans cette partie on prend **n = 2**.
On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.
1) Calculer la probabilité de tirer trois boules de même couleur.
2) On désigne par E l'événement :
« Parmi les trois boules tirées il y a exactement 2 boules de même couleur ».
Montrer que la probabilité P(E) est égale à $\frac{55}{84}$.

**B-**
Dans cette partie on tire simultanément et au hasard 2 boules parmi les **n+7** boules de l'urne.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
1) Démontrer que $P(X=2)=\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+7)}$.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Calculer n pour que l'espérance mathématique E(X) soit égale à 1.

**III- (4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A et B d'affixes $z_A = 1$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . On désigne par E le milieu du segment [AB].

1) Vérifier que $z_E = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2) a- Vérifier que, pour tout réel $\theta$, $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})$.

b- Montrer que $z_E = \cos\frac{\pi}{8}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$ .

c- Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

3) Soit M un point variable d'affixe z tel que $\left| 2z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} \right| = 2$.

Démontrer que M décrit un cercle (C) et vérifier que O appartient à (C).

**IV- (8 points)**

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire les asymptotes de la courbe (C).

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Démontrer que (C) admet un point d'inflexion I à déterminer.

4) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point I.

5) Tracer (T) et (C).

6) La fonction f admet sur IR une fonction réciproque g.

a-Tracer la courbe représentative (G) de g dans le repère donné.

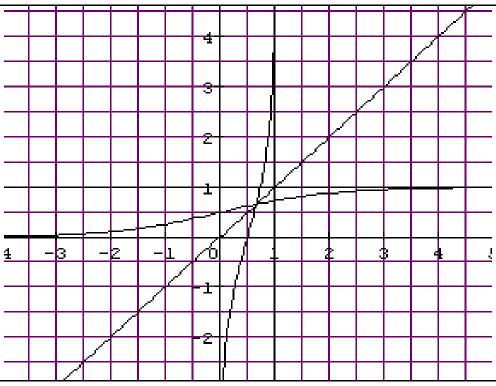
b- Vérifier que $g(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

c- Les deux courbes (C) et (G) se coupent en un point d'abscisse $\alpha$.
Calculer, en fonction de $\alpha$, l'aire du domaine limité par les deux courbes (C), (G) et les deux axes de coordonnées.

| QI | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\overrightarrow{AB}(-3,3,0)$ $\vec{V}(1,-1,0)$ est un vecteur directeur de (AB) donc : $x = m+1, y = -m-1, z = 1$. | 0.5 |
| 2 | Pour $t = \frac{1}{2}$, I appartient à (d). $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$; $\overrightarrow{BI}\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2};0\right)$; donc $\overrightarrow{BI} = -5\,\overrightarrow{AI}$ par suite B, A et I sont alignés.. I appartient à (AB) et (d) avec $A \notin (d)$ donc (AB) et(d) se coupent en I.<br>**Ou** pour $m = -0.5$ I appartient à (AB) et pour $t = \frac{1}{2}$, I appartient à (d). | 0.5 |
| 3 | Les coordonnées de A et B vérifient l'équation donnée puisque: $x_A + y_A + z_A - 1 = 1-1+1-1 = 0$ et $x_B + y_B + z_B - 1 = 0$<br>(d) $\subset$ (P) car les coordonnées du point $(-t+1;-t;2t)$ vérifient l'équation donnée pour tout t. | 1 |
| 4a | $\overrightarrow{IH}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $\vec{n}_p(1\,;1;\,1)$ ont la même direction.<br>Et I appartient au plan (P) donc I est le projeté orthogonal de H sur (P). | 0.5 |
| 4b | $\overrightarrow{AB}.\,\vec{V}_d = 3-3+0 = 0$, donc (AB) et (d) sont perpendiculaires en I. | 0.5 |
| 4c | Volume = $\frac{\text{aire de } ABK \times IH}{3}$. L'aire du triangle KAB<br>$= \frac{IK \times AB}{2} = \frac{IA \times AB}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}u^2$ . Donc $V = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}u^3$.<br>( **OU**: trouver les coordonnées du point K (deux possibilités) puis $V = \frac{\left\lvert \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{AK}\right)\right\rvert}{6}$. | 1 |

| QII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| A1 | P(3 boules de m couleur) = P(3N) + P(3B) = $\frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$. | 0.5 |
| A2 | P(E) = P(2 boules de m couleur)=<br>$P(2R,1\bar{R}) + P(2N,1\bar{N}) + P(2B,1\bar{B}) = \frac{C_2^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{55}{84}$. | 1 |
| B1 | p(X=2) = p(2 rouges) = $\frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \times \frac{2!(n+5)!}{(n+7)!} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$ . | 1 |
| B2 | <table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td>$\frac{C_7^2}{C_{n+7}^2} = \frac{42}{(n+7)(n+6)}$</td><td>$\frac{C_n^1 \times C_7^1}{C_{n+7}^2} = \frac{14n}{(n+7)(n+6)}$</td><td>$\frac{n^2 - n}{(n+7)(n+6)}$</td></tr></table> | 1 |
| B3 | E(X)= $\frac{14n + 2n^2 - 2n}{n^2 + 13n + 42} = 1$ donc $n^2$ – n- 42 = 0 on trouve n = 7 ou n = -6. Donc n = 7. | 0.5 |

| QIII | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $z_E = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac12\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac12\left(1+\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{2+\sqrt2}{4}+i\frac{\sqrt2}{4}$ | **0.5** |
| 2a | $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\theta}+e^{i(0)} = 1+e^{i\theta}$. | **0.5** |
| 2b | $z_E = \frac12\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac12 e^{i\frac{\pi}{8}}(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}) = e^{i\frac{\pi}{8}}\frac12\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$. | **1** |
| 2c | $\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}} = \frac{2+\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt2}{4}i$, **Donc** $\cos^2\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt2}{4}i$<br>$\cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$ $\left(\cos\frac{\pi}{8}>0\right)$ | **1** |
| 3 | $\lvert 2Z-2Z_B\rvert = 2$ ; $\lvert Z-Z_B\rvert = 1$ d'où BM=1 et M décrit le cercle de centre B et de rayon 1. BO=1 donc O appartient à (C). | **1** |

| QIV | Corrigé | Note |
|---|---|---|
| 1 | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$. La droite d'équation y = 0 est asymptote à (C).<br>$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$. La droite d'équation y = 1 est asymptote à (C). | **1** |
| 2 | $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$ | **1** |
| 3 | $f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. f"(x) s'annule pour x = 0 en changeant de signe. Donc le point I(0 ;1/2) est un point d'inflexion. | **1.5** |
| 4 | $f'(0) = \frac14$; $y-\frac12 = \frac{x}{4}$; $y = \frac{x}{4}+\frac12$. | **0.5** |
| 5 |  | 1 |
| 6a | (G) est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x. | **1** |
| 6 b | $e^x = \frac{y}{1-y}$ donc $x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$<br>alors $g(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ | **1** |
| 6c | En utilisant la symétrie par rapport à la première bissectrice, l'aire du domaine en question est le double du domaine limité par (C) et la droite d'équation y = x.<br>$A = 2\int_0^\alpha\left(\frac{e^x}{e^x+1}-x\right)dx = 2\left[\ln\left(e^x+1\right)-\frac12 x^2\right]_0^\alpha = \left(2\ln\left(e^\alpha+1\right)-2\ln2-\alpha^2\right)u^2$. | **1** |