وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة 2011 العادية
عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère la droite (d) définie par :

$$(d)\ \begin{cases} x = t-1 \\ y = t+3 \\ z = t+1 \end{cases} \qquad \text{(t est un paramètre réel).}$$

1) Ecrire une équation du plan (Q) déterminé par le point O et la droite (d).

2) a- Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de O sur (d).
b- Montrer que la distance du point O à la droite (d) est égale à $2\sqrt{2}$.

3) (P) est le plan d'équation $(2m-1)x - my + (1-m)z + 6m - 2 = 0$ où m est un paramètre réel.
a- Vérifier que H appartient à (P).
b- Montrer que (P) contient la droite (d).
c- Calculer, en fonction de m, la distance du point O à (P).

4) Déterminer m pour que la droite (OH) soit perpendiculaire à (P).

II- (4 points)

Dans une école, chaque élève des deux sections SG et SV pratique un seul sport.
Les élèves sont distribués comme l'indique le tableau suivant.

	Football	**Basketball**	**Tennis**
SV	1	6	3
SG	4	4	2

On prend 20 cartons identiques. Sur chaque carton on écrit le nom d'un élève.

A- Les cartons portant les noms des élèves de la section SV sont placés dans une boîte B_1 et ceux portant les noms des élèves de la section SG sont placés dans une autre boîte B_2.
Le directeur de l'école choisit au hasard une boîte puis tire au hasard et simultanément deux cartons de cette boîte. On considère les événements suivants:
E : « la boîte choisie est B_1 »
S : « les deux cartons tirés portent les noms de deux élèves qui pratiquent le même sport »

1) a- Montrer que la probabilité $p(S/E)$ est égale à $\frac{2}{5}$ et déduire $p\left(E\cap S\right)$.
b- Prouver que $p(S) = \frac{31}{90}$.

2) Sachant que les deux cartons tirés portent les noms de deux élèves pratiquant des sports différents, quelle est la probabilité que les noms soient ceux de deux élèves de la section SV ?

B- On suppose dans cette partie que les 20 cartons portant les noms des élèves sont tous placés dans une même boîte B.
On tire simultanément et au hasard trois cartons de cette boîte.

1) Prouver que la probabilité que les trois cartons tirés portent les noms de trois élèves pratiquant le même sport, est égale à $\frac{7}{57}$.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sports pratiqués par les trois élèves dont les noms sont inscris sur les trois cartons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' telles que : $z' = (1 + i\sqrt{3})\,z - 2$.

1) On suppose dans cette partie que $z = 1 + i$.
   a- Montrer que le point M' appartient à la droite d'équation $y = -x$.
   b- Montrer que le triangle OMM' est rectangle en O.

2) Soit I le point d'affixe -2.
   a- Vérifier que $|z'+2| = 2|z|$.
   b- Démontrer que, lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 2, M' décrit un cercle fixe dont on déterminera le centre et le rayon.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   a- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
   b- Montrer que si M décrit la droite d'équation $y = -x\sqrt{3}$, alors M' décrit une droite que l'on précisera.

IV- (8 points)

Soit f la fonction définie, sur $]-\infty\,;+\infty[$, par $f(x) = x + 2 - \dfrac{3}{1+e^{x}}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; montrer que la droite (d_1) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) et préciser la position relative de (d_1) et (C).
   b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; montrer que la droite (d_2) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (C) et préciser la position relative de (d_2) et (C).

2) Démontrer que le point $I\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C).

3) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4) Tracer (d_1), (d_2) et (C).

5) a - Vérifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
   b - Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote (d_2) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où $\lambda > 0$ puis calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

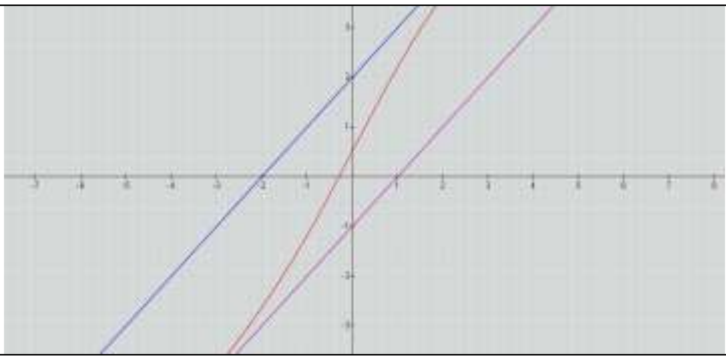
6) On désigne par g la fonction réciproque de f, sur $]-\infty\,;+\infty[$; (G) est la courbe représentative de g.
   a- Vérifier que $E\,(1+\ln 2;\ \ln 2)$ est un point de (G).
   b- Calculer la pente de la tangente à (G) au point E.

Q1	Corrigé	Note
1	Pour t = 0, A (–1, 3, 1) un point de (d). Soit M(x, y, z) un point de (Q) ; donc $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{v_d}\right)=0 \Leftrightarrow$ (Q) : x + y -2z = 0.	0.5
2 a	H (x_H, y_H, z_H) est un point de (d) tel que (OH) soit perpendiculaire à (d) ; donc $\begin{cases} H\in(d) \\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{v_d}=0\end{cases}$ t–1+ t + 3 + t + 1= 0, donc t = –1 et H(– 2, 2, 0).	1
2 b	$OH=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$.	0.5
3a	(2m – 1) (– 2) – 2m + 0 +6m – 2 = 0 Les coordonnées de H vérifient l'équation de (P) ; donc H appartient à(P). **Ou** A appartient à (P) et H appartient à (P).	0.5
3b	(2m–1) (t–1) – m(t + 3) + (1– m) (t + 1) + 6m–2 = 2 m t – 2m – t + 1 – m t – 3 m + t +1– m t – m + 6 m – 2 = 0. Donc (d) est contenue dans (P).	0.5
3c	$d=\dfrac{\lvert 6m-2\rvert}{\sqrt{(2m-1)^2+m^2+(1-m)^2}}=\dfrac{\lvert 6m-2\rvert}{\sqrt{6m^2-6m+2}}$.	0.5
4	(OH) est perpendiculaire au plan (P) Si d= OH, donc $2\sqrt{2}=\dfrac{\lvert 6m-2\rvert}{\sqrt{(2m-1)^2+m^2+(1-m)^2}}$, d'où $12(m^2-2m+1)=0$ par suite m = 1.	0.5

Q2	Corrigé	N
A1a	$p(S/E)$ =p(les deux pratiquent le basketball ou les deux pratiquent le Tennis)= $\dfrac{C_6^2+C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{5}$ $p(E\cap S)=p(E)\times p(S/E)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$.	1
A1b	$P(S) = P(S\cap E) + P(S\cap\overline{E}) = \dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_4^2+C_4^2+C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{13}{90}=\dfrac{31}{90}$.	1
A2	$p(E/\overline{S})=\dfrac{p(E\cap\overline{S})}{p(\overline{S})}=\dfrac{p(E)-P(E\cap S)}{1-p(S)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{1-\frac{31}{90}}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{59}{90}}=\dfrac{27}{59}$.	0.5
B1	P(3 élèves pratiquent le même sport)= $\dfrac{C_5^3+C_{10}^3+C_5^3}{C_{20}^3}=\dfrac{7}{57}$	0.5
B2	$X(\Omega)$ = { 1, 2 , 3} puisque les élèves peuvent pratiquer le même sport ou deux sports, ou trois sports distincts. $p(X=3)=\dfrac{C_5^1\times C_{10}^1\times C_5^1}{C_{20}^3}=\dfrac{25}{114}$; $P(X=1)=\dfrac{7}{57}$; $P(X=2) = 1 - p(X=1) - p(X=3) = \dfrac{25}{38}$.	1

Q3	Corrigé	N
1a	$z'=-1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$. D'où y' = - x', donc M' décrit la droite d'équation y = – x.	0.5

1b	M appartient à la droite d'équation y = x et M' appartient à la droite d'équation y = -x, donc le triangle OMM' est rectangle en O. **Ou** $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$ par suite OM et OḾ sont perpendiculaires.	0.5
2a	$z' + 2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z$; $\|z' + 2\| = \|2z\| = 2\|z\|$.	0.5
2b	M appartient au cercle de centre O et de rayon 2, d'où $\|z\| = 2$; donc $\|z' + 2\| = 4$ d'où $\left\Vert\overrightarrow{IM'}\right\Vert = 4$, donc M' décrit le cercle de centre I et de rayon 4.	1
3a	$x' = x - \sqrt{3}\,y - 2$ et $y' = y + x\sqrt{3}$.	0.5
3b	Si $y + x\sqrt{3} = 0$, alors y' = 0, d'où z' est un réel, donc M' décrit l'axe des abscisses.	1

Q4	Corrigé	N
1a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [3 - \frac{3}{1+e^x}] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x}{1+e^x} = 0$ Donc la droite (d_1) d'équation y = x -1 est asymptote à (C). $f(x) - (x-1) = \frac{3e^x}{1+e^x} > 0$; donc (C) est au-dessus de (d_1).	1
1b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{1+e^x} = 0$. Donc la droite (d_2) d'équation y = x + 2 est asymptote à (C). $f(x) - (x+2) = \frac{-3}{1+e^x} < 0$; (C) est en dessous de (d_2).	1
2	0 centre du domaine et f(2a-x) +f(x) = f(–x) + f(x) = 1 donc I est centre de symétrie de (C).	1
3	$f'(x) = 1 + \frac{3e^x}{(1+e^x)^2}$ f '(x) >0 pour tout x ; d'où f est strictement croissante. $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$	1
4		1
5a	$f(x) = x + 2 - \frac{3}{1+e^x} = x + 2 - \frac{3}{1+e^x} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = x + 2 - \frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}$.	0.5
5b	$A(\lambda) = \int_0^\lambda [(x+2) - (x + 2 - \frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}})]dx = \int_0^\lambda \frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \left[-3\ln(1+e^{-x})\right]_0^\lambda$ $= -3\ln(1 + e^{-\lambda}) + 3\ln 2$ d'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 3\ln 2$.	1.5
6a	$f(\ln 2) = \ln 2 + 2 - \frac{3}{1+e^{\ln 2}} = \ln 2 + 2 - 1 = 1 + \ln 2$ Donc g (1+ln2) = ln 2 et E (1+ ln 2;ln 2) est un point de (G).	0.5
6b	La pente de la tangente à (G) au point E est: $g'(1+\ln 2) = \frac{1}{f'(\ln 2)} = \frac{1}{1 + \frac{3\times 2}{(2+1)^2}} = \frac{3}{5}$.	0.5