الدورة العادية للعام 2011	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم عامة	وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات
الاسم: الرقم:	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	عدد المسائل: ست

ارشادات عامة :- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I-(2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant**, la réponse qui lui correspond.

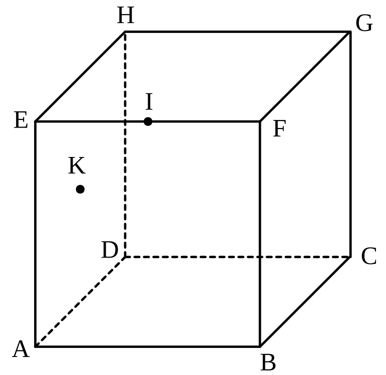
		Réponses		
N°	Questions	a	b	c
1	$\int_{-a}^{a}\left(x^5-\sin x\right)dx =$	$\frac{a^6}{6}$	$\frac{a^6}{24}$	0
2	$\arg\left(\frac{e^{i\pi}}{i}\right)=$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
3	Les racines de l'équation $z+\lvert z\rvert^2=3+i$ sont :	$1+i$ et i	$1+i$ et $-2+i$	$-2+i$ et $-i$
4	Si $u=z-2\bar{z}+i$, alors $i\bar{u}=$	$i\bar{z}+2iz+1$	$i\bar{z}-2iz+1$	$i\bar{z}-2iz-1$
5	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+e^{-x}\right)=$	$+\infty$	0	$-\infty$
6	Si $\alpha=\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$, alors $\alpha=$	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{2\pi}{5}$

II-(2 points)

On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par K le centre du carré ADHE.



1) a-Calculer l'aire du triangle IGA.

b-Calculer le volume du tétraèdre ABIG.

c-Déduire que la distance du point B au plan (AIG) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2) a- Ecrire une équation du plan (AFH).

b- La droite (CE) coupe le plan (AFH) en un point L. Calculer les coordonnées de L.

c- Montrer que L est un point de la droite (FK). Que représente le point L pour le triangle AFH ?

III-(3 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

U_1 contient quatre boules rouges et trois boules vertes.

U_2 contient deux boules rouges et une boule verte.

A-

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges de l'urne U_2 après les deux tirages précédents.

1) Démontrer que la probabilité $P(X = 2)$ est égale à $\frac{9}{14}$.

2) Donner les trois valeurs de X et déterminer la loi de probabilité de X.

B-

Dans cette partie les boules rouges portent chacune le nombre 1 et les boules vertes portent chacune le nombre – 1.

On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne choisie.

On considère les événements suivants :

E : « L'urne choisie est l'urne U_1 »

F : « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 0 ».

1) a- Calculer les probabilités $P(F/E)$ et $P(F/\overline{E})$.

b- Déduire que $P(F) = \frac{13}{21}$.

2) On désigne par G l'événement « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à –2».
Calculer P (G).

IV-(3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite (d) d'équation $x = -4$ et la parabole (P) de foyer O et de directrice (d).

1) a- Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 8x + 16$. Déterminer le sommet S de (P).

b- Tracer (P).

c- Soit D le domaine limité par (P) et l'axe des ordonnées. Calculer l'aire de D.

d- Calculer le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

2) Soit A (6 ; 8) un point de (P).

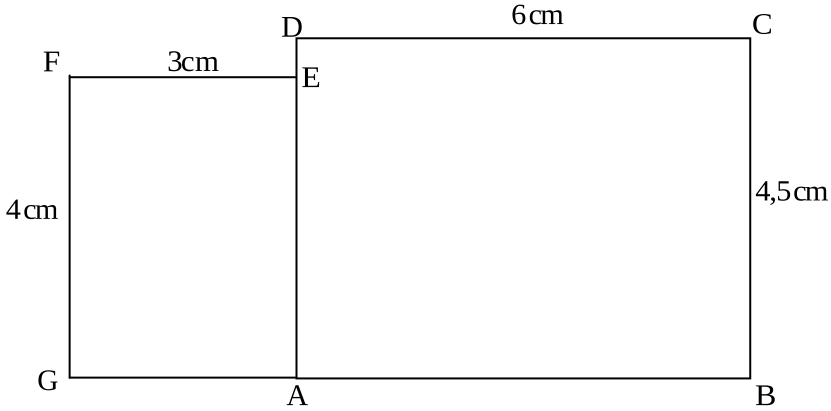
a- Ecrire une équation de la tangente (T_A) en A à (P).

b- La droite (OA) recoupe (P) au point B.
Calculer les coordonnées de B et écrire une équation de la tangente (T_B) en B à (P).

c- Vérifier que (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires et qu'elles se coupent sur la directrice de (P).

3) Soit M(x_o ; y_o) un point de (P) distinct de S.
N est le projeté orthogonal de M sur la tangente en S à (P).
La perpendiculaire menée de N à la droite (MS) coupe l'axe des abscisses en I.
Montrer que l'abscisse de I est indépendante de x_o et y_o.

V-(3 points)



Dans la figure ci-dessus, ABCD et AEFG sont deux rectangles directs où $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (mod 2π).

S est la similitude plane directe qui transforme B en E et C en F ;

T est la translation de vecteur $\vec{EF}$;

f est la similitude définie par T o S.

1) a-Déterminer le rapport k et un angle α de S.

b-Déterminer l'image par S de D.

c-Démontrer que A est le centre de S.

2) a- Déterminer f(B) et f(A).

b- Préciser le rapport et un angle de la similitude f.

c- Construire le centre W de f.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(A ; \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE})$.

a- Ecrire la forme complexe de f.

b- En déduire l'affixe du point W.

4) Soit F_1 l'image de F par S et pour tout entier naturel n non nul on désigne par F_{n+1} l'image de F_n par S.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points A, F_1 et F_n sont alignés.

VI- (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 5[$ par f(x) = ln (5 – x).

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b- Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty\ ;\ 5[$.

2) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 4.

b- Tracer (T) et (C).

c- (C) coupe la droite d'équation y = x en un point d'abscisse α. Vérifier que $1 < \alpha < 2$.

3) f admet une fonction réciproque f^{-1}. On désigne par (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que (C).

a- Montrer que la tangente (T) à (C) est aussi tangente à (C').

b-Tracer (C').

4) Soit h la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 5[$ par h(x) = (5 – x) ln(5 – x).

a- Vérifier que $h'(x) + f(x) = -1$ et déduire une primitive de la fonction f.

b- On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations x = α et x = 4. Prouver que $A(\alpha) = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.

5) Soit l'intervalle $I = [0\ ;\ 3]$.

a- Montrer que $f(I)$ est inclus dans I.

b- Montrer que, pour tout x de I, on a $|f'(x)| \le \dfrac{1}{2}$.

c- En déduire que, pour tout x de I, $|f(x) - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

6) On considère la suite (U_n) définie par $U_o = 1$ et, pour tout $n \ge 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a- Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \ge 0$, U_n appartient à I.

b- Etablir que, pour tout $n \ge 0$, $|U_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

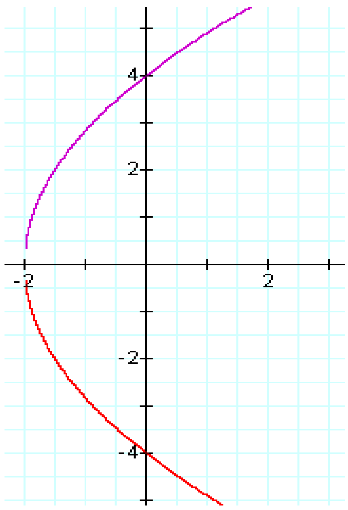
c- Démontrer que, pour tout $n \ge 0$, $|U_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2^n}$ et déduire que la suite (U_n) est convergente.

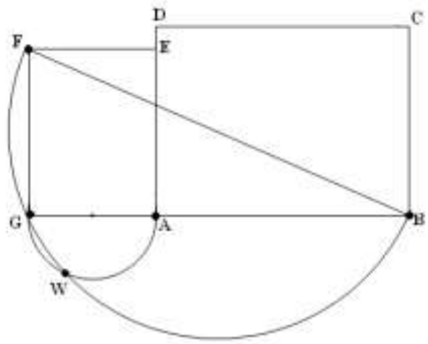
Q1	Corrigé		N
1	Intégrale d'une fonction impaire sur $[-a,a]$ est nulle.	c	1
2	$\arg\left(\dfrac{e^{i\pi}}{i}\right)=\arg\left(\dfrac{-1}{i}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$.	b	0,5
3	$x + iy + x^2 + y^2 = 3 + i$, d'où $y = 1$ et $x^2 + y^2 + x= 3$; $x^2 + x-2= 0$. Donc $x = 1$ ou $x= -2$ d'où $z = 1 + i$ ou $z = -2 +i$.	b	1
4	$\overline{u}=\left(\overline{z-2\overline{z}+i}\right)=\overline{z}-2z-i$; $i\overline{u}=i\overline{z}-2iz+1$.	b	0,5
5	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+e^{-x}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-t+e^{t}\right)=-\lim\limits_{t\to+\infty}e^{t}\left(\dfrac{t}{e^{t}}-1\right)=+\infty$.	a	0,5
6	$\alpha=\arcsin\left(\sin\dfrac{7\pi}{5}\right)=-\dfrac{2\pi}{5}$ car $-\dfrac{2\pi}{5}\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right)=\sin\dfrac{7\pi}{5}$.	c	0,5

Q2	Corrigé	N
1a	$I(\frac{1}{2};0;1)$, $G(1;1;1)$; $\overrightarrow{IG}(\frac{1}{2};1;0)$ et $\overrightarrow{IA}$ (-1/2 ; 0 ; -1). $\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$. Aire(IGA) $=\frac{1}{2}\sqrt{1+1/4+1/4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.	0,5
1b	$\overrightarrow{AB}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$; $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA})=-1$. Le volume du tétraèdre ABIG est $V=\frac{1}{6}\left\lvert\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA})\right\rvert=\frac{1}{6}$. Soit d la distance de B au plan (AIG).	0,5
1c	On a aussi $V=\frac{1}{3}\text{Aire(IGA)}\times d=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot d$. D'où $d=\frac{\sqrt{6}}{3}$.	0,5
2a	$\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AH}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. (AFH) : $x+y-z=0$.	0,5
2b	(C E) : $x=t;y=t;z=-t+1$. (CE) $\cap$ (AFH) : $t + t + t - 1 = 0$. D'où $t=\frac{1}{3}$ et $L(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3})$.	1
2c	$\overrightarrow{FL}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{FK}\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, d' où $\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FK}$. Donc L est un point de [FK] médiane dans le triangle AFH, alors L est le centre de gravité du triangle AFH.	1

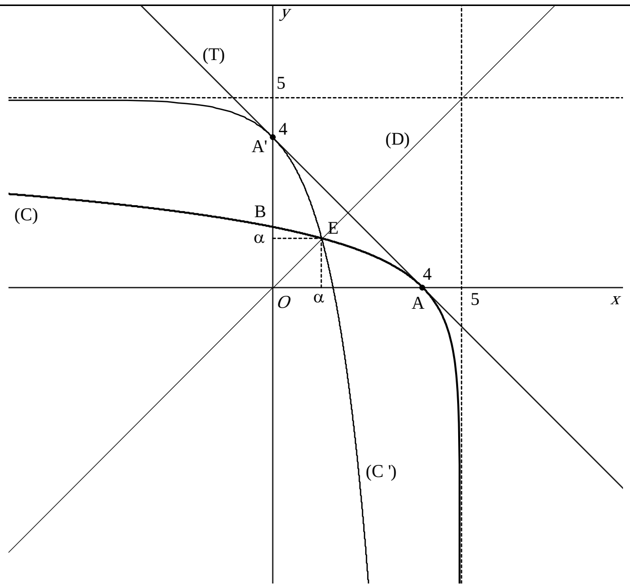
Q3	Corrigé	N
A 1	X = 2 est réalisé lorsque on tire une boule rouge de U_1 puis une rouge de U_2 ou une verte de U_1 puis une verte de U_2. $P(X=2)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{14}$.	1,5
A 2	Les valeurs possibles de X sont 1, 2 et 3. X = 1 est réalisé à condition qu'on ne mette pas dans U_2 une boule rouge. Il faut donc tirer une verte de U_1 puis tirer une rouge de U_2. $P(X=1)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{14}$.	1,5

	X = 3 est réalisé lorsqu'on tire une boule rouge de U_1 et une boule verte de U_2. $P(X=3)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{7}$. Ou : $P(X=3)=1-\left(\frac{9}{14}+\frac{3}{14}\right)=\frac{1}{7}$.	
B 1	Pour avoir une somme nulle il faut tirer une boule rouge et une verte. $P(F/E)=\frac{4\times 3}{C_7^2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$; $P(F/\bar{E})=\frac{2\times 1}{C_3^2}=\frac{2}{3}$.	1
B 2	$P(F)=P(F\cap E)+P(F\cap\bar{E})=P(E)\times P(F/E)+P(\bar{E})\times P(F/\bar{E})=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{21}$.	1
B3	G est réalisé lorsqu'on tire deux boules vertes ce qui n'est possible que dans un tirage de l'urne U_1, $P(G)=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{14}$.	1

<table>
<tr><th>Q4</th><th colspan="4">Corrigé</th><th>N</th></tr>
<tr><td>1a</td><td colspan="4">$MO=d(M\to(d))$; $MO^2=d^2(M\to(d))$; $x^2+y^2=(x+4)^2$; $y^2=8x+16$.
$y^2=8x+16$; $(y-0)^2=8(x+2)$ Le sommet est S (– 2; 0).</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1b</td><td rowspan="4">
</td><td rowspan="4">0.5</td><td>1c</td><td>$A=2\int_{-2}^{0}\sqrt{8x+16}\,dx=\frac{1}{6}\left[\sqrt{(8x+16)^3}\right]_{-2}^{0}=\frac{32}{6}u^2.$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>$V=\pi\int_{-2}^{0}y^2dx=\pi\int_{-2}^{0}(8x+16)\,dx=16\pi u^3.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>$2yy'=8$; $y'=\frac{4}{y}$; $y'_A=\frac{1}{2}$. L'équation de (T_A)
est $y=\frac{1}{2}x+5$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>(OA) : $y=\frac{4}{3}x$. Les abscisses des points
d'intersection de (OA) et (P)
vérifient: $\frac{16}{9}x^2=8x+16$, $2x^2-9x-18=0$;
$x'=6$ et $x''=-\frac{3}{2}=x_B$.
$B(-\frac{3}{2}\,;-2)$. L'équation de (T_B) est
$y+2=y'_B(x+\frac{3}{2})$; $y=-2x-5$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2c</td><td colspan="4">Le produit des pentes de (T_A) et (T_B) est égal à – 1 donc (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires. de plus $\frac{1}{2}x+5=-2x-5$; $x=-4$ et $y=3$, donc (T_A) et (T_B) se coupent sur la directrice (d).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="4">Soit I(a ; 0) . On a $N(-2\,;\,y_\circ)$; $\overrightarrow{MS}(-2-x_\circ;-y_\circ)$; $\overrightarrow{mI}(a+2;-y_\circ)$
$\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{mI}=0$; $(-2-x_\circ)(a+2)+y_\circ^2=0$; $(-2-x_\circ)(a+2)+8(x_\circ+2)=0$; $(x_0+2)(6-a)=0$;
a = 6 ($x_\circ\neq-2$). Donc I(6 ; 0).</td><td>1</td></tr>
</table>

Q5	Corrigé	N
1a	$S = sim(k\ ;\ \alpha)$; $B \xrightarrow{S} E$; $C \xrightarrow{S} F$ $EF = k\,BC$; $k = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$; $\alpha = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EF}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.	1
1b	EFG est directement semblable à BCD. Donc S(D)= G.	0,5
1c	S(BCDA) est le rectangle direct EFGA, S(A) = A, donc A est le centre de S.	0,5
2a	f(B) = T(S(B)) = T(E) = F ; f(A) = T(S(A)) = T(A) = G.	0,5
2b	$f = sim\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$.	0,5
2c	$\left(\overrightarrow{WB}, \overrightarrow{WF}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{WA}, \overrightarrow{WG}\right) = \frac{\pi}{2}$; W est le point d'intersection des deux cercles de diamètres [BF] et [AG] autre que G.  	1
3a	f : M(z) → M'(z') ; $z' = \frac{2}{3}iz + b$; $z_G = = \frac{2}{3}iz_A + b$; b = – 3. La forme complexe de f est $z' = \frac{2}{3}iz - 3$.	0,5
3b	$z_W = \frac{2}{3}iz_W - 3$; $3z_W - 2iz_W = -9$; $z_W = \frac{-9}{3-2i} = -\frac{27}{13} - \frac{18}{13}i$.	0,5
4	$\left(\overrightarrow{AF_1}, \overrightarrow{AF_n}\right) = \left(\overrightarrow{AF_1}, \overrightarrow{AF_2}\right) + \left(\overrightarrow{AF_2}, \overrightarrow{AF_3}\right) + \dots + \left(\overrightarrow{AF_{n-1}}, \overrightarrow{AF_n}\right) = (n-1)\frac{\pi}{2}$. A, F_1 et F_n sont colinéaires pour $(n-1)\frac{\pi}{2} = k\pi$; donc n = 2k+1 où k est un entier. (n est impair).	1

Q6	Corrigé	N
1a	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. La droite d'équation x = 5 est asymptote à (C) et la courbe (C) admet en $-\infty$ une direction asymptotique horizontale.	1,5
1b	$f'(x) = \frac{1}{x-5}$ avec $x - 5 < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 5[$. x : $-\infty$ … 5 f'(x) : – f(x) : $+\infty$ ↘ $-\infty$	1
2a	A(4 ; 0) et f'(4) = –1. (T) est la tangente en A à(C) ; (T) : $y = -x + 4$.	0,5

2b		1,5	2c	f(1) = ln4 > 1 et f(2) = ln3 < 2 donc $1<\alpha<2$.	0,5
3a	(C') est symétrique de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$. (C) coupe $x'x$ en $A(4\,;0)$ et admet la droite (T) comme tangente en A. Par symétrie par rapport à (D), (C') coupe $y'y$ au point $A'(0\,;4)$ et admet la symétrique de (T) par rapport à (D), comme tangente en A' . Or (T) $\perp$(D), donc (T) est son propre symétrique par rapport à (D). Enfin, (T) est la tangente en A' à (C'). **Voir la figure dans la partie 2b**.				1
3b	(C) et (C') sont symétrique par rapport à la droite y = x.				1
4a	$h'(x) = -1-\ln(5-x)$; D'où $h'(x)+f(x) = -1$, d'où $F(x) = -h(x) - x$.				1
4b	$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,dx = \alpha-4-(5-\alpha)\ln(5-\alpha)$. Or $\ln(5-\alpha) = \alpha$; d'où $A(\alpha) = -4+\alpha+5\alpha-\alpha^2 = -\alpha^2+6\alpha-4\ u^2$.				1
5a	f est continue et strictement décroissante ; f(I)= [f(3), f(0)]= [ln2, ln5]$\subset$ I.				0,5
5b	$f'(x) = \dfrac{1}{x-5}$ avec $x-5<0$; donc $\lvert f'(x)\rvert = \dfrac{1}{5-x}$. Or $0 \le x \le 3$, donc $2 \le 5-x \le 5$ et $\dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{5-x} \le \dfrac{1}{2}$. Par suite $\lvert f'(x)\rvert \le \dfrac{1}{2}$.				1
5c	D'après l'inégalité des accroissements finis on peut écrire $\lvert f(x)-f(\alpha)\rvert \le \dfrac{1}{2}\lvert x-\alpha\rvert$ avec $f(\alpha) = \alpha$. D'où $\lvert f(x)-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2}\lvert x-\alpha\rvert$.				0,5
6a	$U_0 = 1$; donc $U_0 \in I$. Si $U_n \in I$, alors $f(U_n) \in f(I)$. D'où $U_{n+1} \in I$.				1
6b	$U_n \in I$, donc $\lvert f(U_n)-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2}\lvert U_n-\alpha\rvert$. Par suite $\lvert U_{n+1}-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2}\lvert U_n-\alpha\rvert$				0,5
6c	$U_0 = 1$ et $1<\alpha<2$; donc $-1<U_0-\alpha<0$ et $\lvert U_0-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2^0}$. Si $\lvert U_n-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2^n}$, alors $\lvert U_{n+1}-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2}\lvert U_n-\alpha\rvert \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$. (**Ou** bien par multiplication et simplification – cascade-) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\lvert U_n-\alpha\rvert = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = \alpha$				1,5