وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسميّة	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة	دورة العام ٢٠١٦ الإستثنائية الخميس ٤ آب ٢٠١٦
عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I-(2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

Q	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	Si $F(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$, alors $F'(2)=$	e^4	$4e^4$	e^{16}	$4e^{16}$
2	Si $n\in\mathbb{N}-\{0;1\}$, alors $C_n^2+C_n^3+.....+C_n^{n-1}+C_n^n=$	$2^{n-1}-n+1$	2^n+n-1	2^n-n-1	2^n+n+1
3	z et z' sont deux nombres complexes tels que $z\neq -3i$ et $z'=\dfrac{z+3i}{z-3i}$, alors $\lvert z'\rvert=$	$\dfrac{1}{2}$	1	2	3
4	Si $f(x)=\ln(e^x-x)$ et $g(x)=\operatorname{arctg}(2x)$ où x est un réel , alors $(f\circ g)'(0)=$	0	1	2	3

II-(2,5 points)

On donne dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(0;-3;5)$, $B(-2;0;1)$ et la droite (D) définie par les équations paramétriques $x=k+3$; $y=4k+1$ et $z=2k+6$ où k est un réel.

1) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).
2) Démontrer que (AB) et (D) sont deux droites non coplanaires.
3) Vérifier qu'une équation du plan (Q) contenant la droite (AB) et parallèle à la droite (D) est : $-2x+z-5=0$.
4) a- Trouver un système d'équations paramétriques de la droite (D') passant par A et perpendiculaire à (Q).

   b- Montrer que (D) et (D') se coupent en un point E dont on déterminera les coordonnées.
5) Soit F un point du plan (Q) d'abscisse strictement négative et d'ordonnée nulle.
   Calculer les coordonnées du point F pour que le tétraèdre AFBE ait un volume égal à 5 unités de volumes.

III-(2,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{1}{4}$ et les points $A(4;2)$, $E(0;1)$ et $F(m;0)$ où m est un paramètre réel plus petit que 1.

1) Déterminer m pour que $AF = \frac{17}{4}$.

Dans ce qui suit on prend $m = \frac{1}{4}$.

2) Démontrer que A se trouve sur la parabole (P) de foyer F et de directrice (Δ).

3) a- Ecrire une équation de (P).
   b- Tracer (P).

4) a- Prouver que la droite (AE) est tangente à (P).
   b- Calculer l'aire du domaine limité par (P) et les segments [OE] et [AE].

5) La droite (AE) coupe la droite (Δ) en L.
   Soit (d) la droite passant par L et perpendiculaire à la droite (AL).
   Prouver que (d) est la tangente à (P) en un point K dont on déterminera les coordonnées.

IV-(3 points)

Une boite V contient des cartes :

- 20% des cartes sont bleues et les autres sont rouges ;
- 40% des cartes bleues portent des numéros impairs;
- 32% des cartes de la boite portent des numéros impairs.

1) On tire au hasard une carte de la boite V.
   On considère les évènements suivants :

   B : «tirer une carte bleue»
   R : «tirer une carte rouge»
   I : «tirer une carte portant un numéro impair »

   a- Calculer la probabilité $p(I \cap B)$ et vérifier que $p(I \cap R) = 0,24$.

   b- Déduire $p(I/R)$.

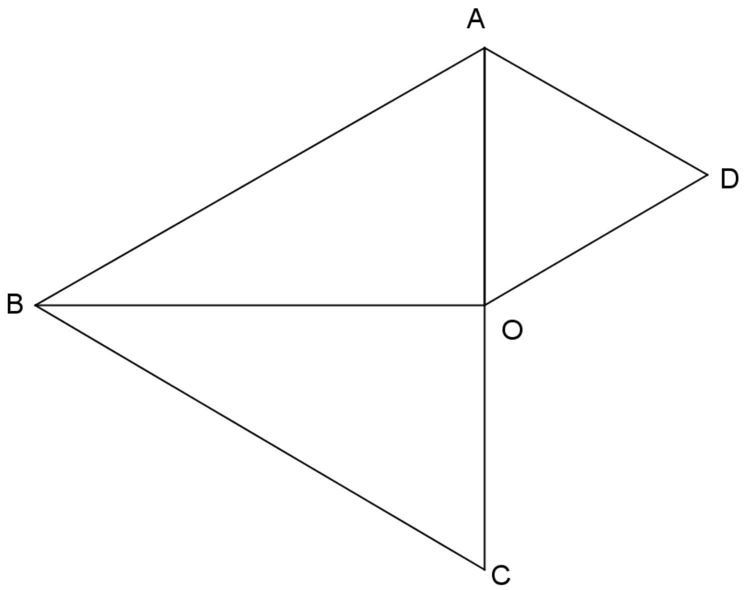
   c- La carte tirée ne porte pas un numéro impair, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2) Dans cette partie on suppose qu'il y a 50 cartes dans la boite V.
   On tire simultanément et au hasard trois cartes de V et on considère les évènements suivants :
   M : « parmi les trois cartes tirées, exactement deux portent des numéros impairs»
   N : « les trois cartes tirées sont bleues»
   L : « parmi les trois cartes tirées, exactement deux portent des numéros impairs et une est bleue»

   Calculer $p(M)$; $p(N/M)$ et $p(L)$.

V- (3 points)

Dans la figure ci-dessous, ABC et AOD sont deux triangles équilatéraux directs avec O milieu de [AC].



Soit S la similitude plane directe qui transforme B en O et C en D.

1) a- Déterminer le rapport k et un angle α de S.
   b- Vérifier que A est le centre de S.

2) On considère la transformation R tel que $R(B) = C$ et $R(C) = A$.
   a- Montrer que R est une rotation dont on déterminera un angle.
   b- Déterminer le centre G de R.

3) Soit $h = S \circ R$.
   a- Déterminer h(B) et h(C).
   b- Déterminer la nature, le centre et le rapport de h.

4) On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{v}$.
   a- Déterminer la forme complexe de S.
   b- Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ et (E') son image par S.
   Déterminer une équation de l'axe focal de (E´).

VI- (7 points)

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}-x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y=-x$ est une asymptote à (C).

   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y=-x+2$ est une asymptote à (C).

   c- Démontrer que la courbe (C) est située entre les deux droites (d) et (d').

2) Montrer que le point $W(0;1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C).

3) a- Montrer que, pour tout réel x, $-1<f'(x)<0$ et dresser le tableau de variations de f.

   b- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une racine unique α puis vérifier que $1{,}6<\alpha<1{,}7$

   c- Démontrer que pour tout $x\in[0;\alpha], 0\le f(x)\le\alpha-x$.

4) Tracer (d), (d') et (C).

5) a- Prouver que f admet une fonction réciproque g dont on déterminera le domaine de définition.

   b- Déterminer les asymptotes à la courbe (C') de g.

   c- Ecrire une équation de la droite (T) tangente à (C') en son centre de symétrie.

   d- Tracer (T) et (C') dans le même repère que (C).

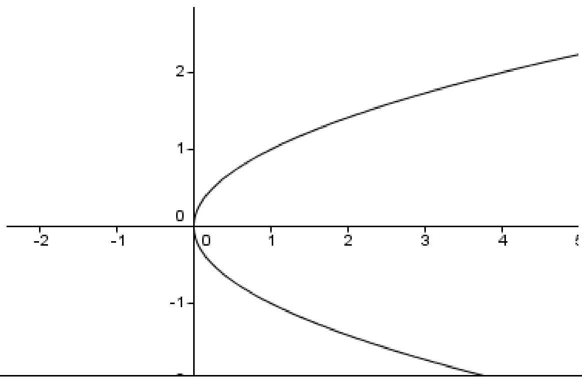
6) Soit β l'abscisse du point d'intersection de (C) et (C').
   Montrer que l'aire de la région limitée par (C), (C') et les axes de coordonnées est égale à $\left[-4\ln(2-2\beta)-2\beta^2\right]$ unités d'aires.

مشروع معيار التصحيح

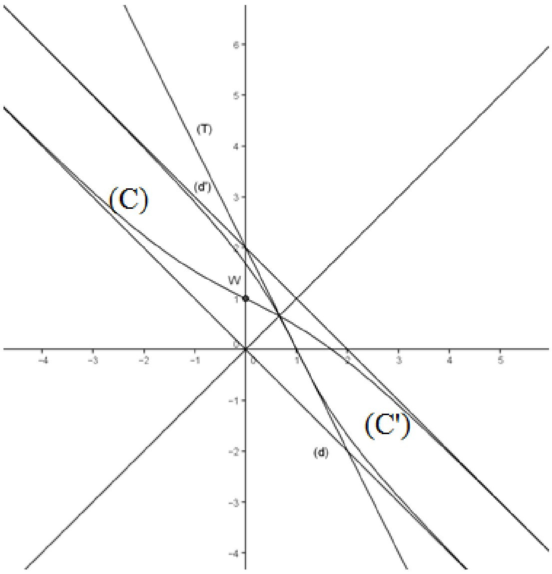
مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: أربع ساعات

Q-I	Réponses		N
1	$f'(x)=e^{x^2}$; $f'(2)=e^4$.	a	1
2	$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+\ldots+C_n^n=(1+1)^n;C_n^2+C_n^3+C_n^4+\ldots+C_n^n=2^n-1-n.$	c	1
3	$\lvert z'\rvert=\left\lvert\frac{z+3i}{\overline{z}-3i}\right\rvert=\left\lvert\frac{z+3i}{\overline{\overline{z+3i}}}\right\rvert=1$.	a	1
4	$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$, $g'(x)=\frac{2}{1+4x^2}$, $g(0)=0$, $g'(0)=2;f'(g(0))\times g'(0)=0.$	a	1

Q-II	Réponses	N
1	(AB) : $x=-2t$; $y=3t-3$; $z=-4t+5$	0,5
2	soit $C(3;1;6)$ un point de (D) ; $\overrightarrow{AC}(3;4;1)$; $\overrightarrow{v_{(D)}}(1;4;2)$; $\overrightarrow{AB}(-2;3;-4)$ $\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{V_{(D)}}\wedge\overrightarrow{AB})=-60$ donc (AB) et (D) sont non coplanaires.	1
3	soit $M(x;y;z)$ un point de (Q); $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{V_D}\wedge\overrightarrow{AB}\right)=0$ donne (Q): $-2x+z-5=0$	1
4a	(D') : $x=-2m$; $y=-3$; $z=m+5$	0,5
4 b	$4k+1=-3; k=-1; E(2;-3;4)$.	1
5	$F(x;0;2x+5); V=\frac{1}{6}\lvert\det(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})=\frac{1}{6}\lvert-15x-30\rvert=5; x=-4$ ou $x=0$ (inacc) ; donc $F(-4;0;-3)$.	1

Q-III	Réponses	N
1	$(4-m)^2+4=\frac{289}{16}; m=\frac{1}{4}$ ou $m=\frac{-31}{4}$ inaccep. Donc $m=\frac{1}{4}$	0.5
2	$H\left(-\frac{1}{4};2\right)$ est le projeté orthogonal de A sur la directrice (Δ). $AF=AH=\frac{17}{4}$	0.5
3a	Sommet ; S (0 ; 0) ; p $=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Une équation de (P) est $(y-y_S)^2=2\frac{1}{2}(x-x_S)$; $y^2=x$.	0.5
3b		0.75

4a	E est le milieu de [FH] et le triangle AFH est isocèle donc (AE) est bissectrice de AFH et tangente en A à (P). ou par vérification $(AE): y=\frac{1}{4}x+1$	**0.75**
4b	$\int_0^4\left[y_{(AE)}-y_{(P)}\right]dx=\frac{8}{3}$ ua	**1**
5	$(d): y=-4x+\frac{1}{16}; {y_{(P)}}^2={y_{(d)}}^2; x=\frac{1}{64}; K\left(\frac{1}{64};-\frac{1}{8}\right)$	**1**
Q-IV	**Réponses**	**N**
1a	$p(I\cap B)=P\left(I/B\right)\times p(B)=0,4\times 0,2=0,08$ $p(I\cap R)=p(I)-p(I\cap B)=0,32-0,8=0,24.$	**1**
1b	$p\left(I/R\right)=\frac{p(I\cap R)}{p(R)}=\frac{0,24}{0,8}=0,3$	**1**
1c	$p\left(R/\bar{I}\right)=\frac{p(R\cap\bar{I})}{p(\bar{I})}=\frac{0,7\times 0,8}{0,68}=\frac{14}{17}$	**1**
2	$p(M)=\frac{C_{16}^2\times C_{34}^1}{C_{50}^3}=\frac{51}{245}$ $p(N/M)=\frac{p(N\cap M)}{p(M)}=\frac{\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{50}^3}}{\frac{51}{245}}=\frac{3}{340}$ $p(L)=\frac{C_4^1\times C_{12}^1\times C_{28}^1+C_6^1\times C_{12}^2}{C_{50}^3}=\frac{87}{980}$	**3**
Q-V	**Réponses**	**N**
1a	$k=\frac{OD}{BC}=\frac{1}{2}.\quad \alpha=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{3}(\text{mod}\,2\pi).$	**0,5**
1b	$\frac{OA}{BA}=\frac{1}{2}=K$ et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)=\frac{\pi}{3}.$	**0,5**
2a	$BC=CA$ et $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}\right)=2\frac{\pi}{3}(\text{mos}\ 2\pi)$ alors R est une rotation d’angle $\frac{2\pi}{3}$	**1**
2b	le point G intersection des médiatrices des segments [BC] et [CA]..	**0,5**
3a	$h(B)=S\circ R(B)=S(C)=D$, $h(C)=S\circ R(C)=S(A)=A$.	**0,5**
3b	$h=S\circ R=S'(W;\frac{1}{2};\pi)=h\left(W;-\frac{1}{2}\right)$, le centre w de h est le point d’intersection des droites (BD) et (AC).	**1**
4a	S : $z'-z_A=a(z-z_A)$, $a=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\sqrt{3}$, $z'=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\sqrt{3}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.	**1**
4b	(BO’) avec O’ est le milieu du segment [OD]	**1**
Q-VI	**Réponses**	**N**
1a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{e^x+1}=0$ donc (d) : $y=-x$ est une asymptote à (C).	**1**

1b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x-2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x+1} = 0$ donc (d) : $y = -x+2$ est une asymptote à (C).	**1**
1c	$\left(f(x)+x\right) = \frac{2e^x}{e^x+1} > 0$ donc (C) est au-dessus de (d). $\left(f(x)+x-2\right) = \frac{-2}{e^x+1} < 0$ donc (C) est au-dessous de (d'). par suite (C) est située entre les deux droites (d) et (d').	**1**
2	$f(x)+f(-x) = \frac{2e^x}{e^x+1} - x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} + x = 2$	**1**
3a	$f'(x) = \frac{-e^{-2x}-1}{(e^x+1)^2} \prec 0$ et $f'(x)+1 = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \succ 0.$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & -\infty \end{array}$	**1.5**
3b	f est continue strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une racine unique α et puisque $f(1,6)\times f(1,7) = 0,064\times(-0,0089) < 0$ alors $1,6 < \alpha < 1,7$.	**1**
3c	$-1 < f'(x) < 0 < 1 \Rightarrow \|f'(x)\| < 1$ et f est continue sur $[-1,+1]$ et dérivable sur $]-1,+1[$ alors $\left\|\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right\| < 1$; $f(\alpha)=0$ et $f(x)\ge 0$ pour $x\le\alpha$; alors $0 \le f\left(x\right) \le \alpha - x$	**1**
4		**1**
5a	f continue strictement décroissante sur ℝ donc admet une fonction réciproque g définie sur ℝ	**1**
5b	(d) et (d') car ces deux droites sont perpendiculaires à la première bissectrice.	**1**
5c	g'$\left(2\right) = \frac{1}{f'(0)}$ =-2; $\left(T\right) : y = -2x+2$	**1**
5d	figure	**1**
6	A cause de la symétrie par rapport à la premiere bissectrice, l'aire du domaine demandé est le double de l'aire du domaine limité par (C), l'axe des ordonnées et la première bissectrice. $A = 2\int_0^\beta [f(x)-x]dx = 2\left[\ln(1+e^x) - x^2\right]_0^\beta = 2\left[2\ln(1+e^\beta) - \beta^2 - 2\ln 2\right]$ or $f(\beta)=\beta$; $\frac{2e^\beta}{1+e^\beta} = 2\beta$; $e^\beta = \frac{\beta}{1-\beta}$; $A = -4\ln(1-\beta) - 2\beta^2 - 2\ln 2 = \left[-4\ln\left(2-2\beta\right) - 2\beta^2\right]$u.a.	**1.5**