وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : الاجتماع والاقتصاد	دورة العام ٢٠١٦ العاديّة الاثنين ١٣ حزيران ٢٠١٦

عدد المسائل : أربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة : ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة : يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المُرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 علامات)

تعرض إحدى شركات التامين على موظفيها سعراً خاصاً لعقد التأمين على الحياة. يمثّل الجدول التالي هذا العرض.

عمر الموظّف بالسنوات	25	26	27	28	29
الرتبة x_i	0	1	2	3	4
القسط السنوي (بمئات الآلاف ل.ل.) y_i	2	2.5	3.25	3.75	4

1) a) أحسب $\overline{x}$ و $\overline{y}$ ، متوسطي المتغيّرين x و y .

b) اكتب معادلة الانحدار الخطّي (D) للمتغيّر y بدلالة x.

2) أرسم في المستوى الإحداثي تشتُّت النقاط العائد للتوزيع $(x_i ; y_i)$. وكذلك مركز الثقل G والمستقيم (D).

(الوحدة على محور x تساوي 2 cm والوحدة على محور y تساوي 4 cm.)

3) نعتبر أن المنوال أعلاه يستمرّ صالحاً حتى سنّ 35. قدّر القسط السنوي لموظّف عمره الآن 31 سنة.

4) ما هي النسبة المئوية للزيادة على القسط السنوي بين موظّف عمره 25 سنة وموظّف آخر عمره 31 سنة.

II- (4 علامات)

يتوزّع موظفو إحدى المدراس على ثلاث فئات: المعلّمون ، الإداريّون والتقنيّون.

- 80% من الموظّفين هم معلّمون و 70% من هؤلاء هم نساء.
- 10% من الموظّفين هم إداريون و 80% من هؤلاء هم نساء.
- 65% من الموظّفين هم نساء.

تم اختيار أحد موظّفي هذه المدرسة عشوائيا". نعرّف الأحداث التالية:

I: « الموظّف المختار هو معلم » A: «الموظّف المختار هو إداري»

T: «الموظّف المختار هو تقني » M: «الموظّف المختار هو رجل » W:« الموظّف المختار هي امرأة»

1) احسب الاحتمال P(M).

2) احسب $P(I \cap W) ; P(A \cap W)$ و تحقّق أن $P(W/T) = 0.1$.

3) علماً أن الموظّف المختار هو رجل، فما احتمال أن يكون معلّما"؟

4) نفترض في هذا الجزء من المسألة أن عدد موظّفي المدرسة هو 200. وأن أسماء هؤلاء الموظّفين قد كتبت على بطاقات ووضعت هذه البطاقات في صندوق.

تمّ سحب ثلاث بطاقات عشوائياً ودفعة واحدة من الصندوق. ما احتمال الحدث التالي:

B: «لا تحمل أي من البطاقات الثلاث اسم تقني و يوجد بطاقة على الأقل عليها اسم إداري وكذلك بطاقة على الأقل عليها اسم معلّم».

III- (4 علامات)

في نهاية تموز من العام 2015 قرّر أحد المتقاعدين أن يضع مبلغ قيمته 220 مليون ل.ل. في أحد المصارف و ذلك بفائدة سنوية معدلها6% ومركبة شهرياً. قرّر هذا الشخص أن يسحب 2 مليون ل.ل. في نهاية كل شهر لمصاريفه وذلك بعد احتساب الفائدة.
يمثّل العدد الطبيعي n رتبة الشهر بعد وضع المبلغ في المصرف و ليكن U_n قيمة هذا المبلغ بعد سحب 2 مليون ل.ل. شهرياً.

وهكذا فإن$U_0 = 220$

1) تحقّق أنّ $U_1 = 219.1$ ثم احسب U_2 .
2) برهن أنّ $U_{n+1} = 1.005U_n - 2$.
3) لكل عدد طبيعي n ، نعطي $V_n = U_n - 400$.
   a) برهن أنّ (V_n) هي متتالية هندسية. جد نسبتها الثابته وحدّها الأول.
   b) برهن أنّ $U_n = -180 \times (1.005)^n + 400$.
   c) برهن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة.
4) بعد كم سنة ستصبح قيمة الحساب وللمرة الأولى أقلّ من نصف قيمته الأساسية ؟

IV- (8 علامات)

القسم A

لتكن الدالّة f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي $f(x) = -x^2e^{-x} + 3$ وليكن (C) بيان هذه الدالّة في المستوى الإحداثي $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدِّد النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج مقارباً (محاذي) (d) للبيان (C).
2) بيِّن أنّ $f'(x) = x(x-2)e^{-x}$ و أنشئ جدول التغيير للدالّة f .
3) ارسم (d) و (C).
4) لتكن F الدالّة المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $F(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 3x$.
   a) برهن أنّ F هي تكامل للدالة f.
   b) استنتج مساحة المنطقة المحدَّدة بالبيان (C) ومحور x و محور y و المستقيم ذو المعادلة x = 2.

القسم B

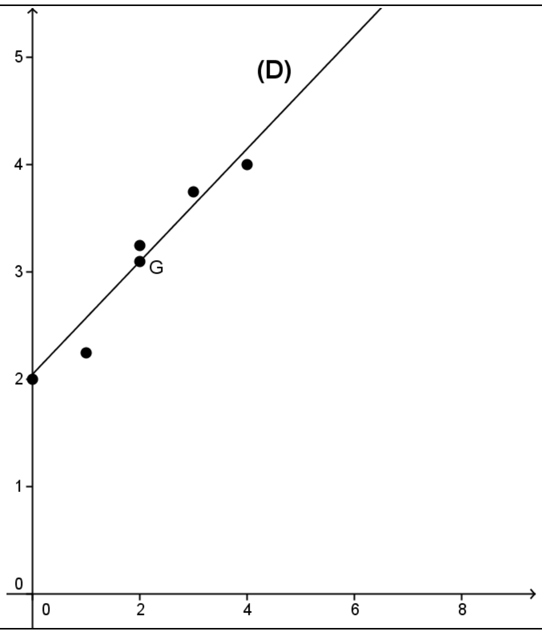
ينتج أحد المصانع نوعاً من الطلاء وقد تمّ بيع كلّ المنتجات. تمثّل الدالّة $f(x) = -x^2e^{-x} + 3$ الكلفة المتوسّطة للإنتاج بمئات آلاف الليرات اللبنانية حيث أن x بمئات الليترات و $x \in [0.2\ ;\ 9]$.

1) حدّد بالليرات اللبنانية الكلفة المتوسّطة لإنتاج 600 ليتر من الطلاء.
2) a) كم ليتراً من الطلاء يتوجّب على المصنع إنتاجه بحيث يكون للكلفة المتوسّطة للإنتاج القيمة الدنيا؟
   ما هي عندئذٍ الكلفة المتوسّطة بالليرات اللبنانية؟
   b) إذا كان سعر مبيع 100 ليتر من الطلاء هو 230 000 ل.ل. ، هل يحقّق المصنع ربحاً ؟ إشرح.
3) a) جدْ الكلفة الاجمالية $C_T(x)$ بدلالة x.
   b) كم ليتراً من الطلاء يتوجّب على المصنع إنتاجه بحيث تكون الكلفة المتوسّطة للإنتاج مساوية للكلفة الهامشية.

مشروع معيار التصحيح

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

I- (7 points)

Q	Correction	Grade
1-a	$\overline{x}=2$; $\overline{y}=3.1$	**1**
1-b	$(D): y=0.525x+2.05$	**1**
2	$G(2,3,1)$ 	**2**
3	age of 31 $\rightarrow x=6$ then $y=0.525(6)+2.05=5.2$ therefore 520 000 LL	**1.5**
4	$\dfrac{5.2-2}{2}=1.6$ then 160% is the increasing percentage	**1.5**

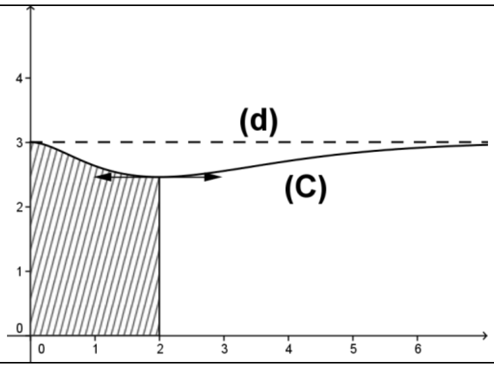
II- (7 points)

Q	Correction	Grade
1	$P(M)=1-P(W)=1-0.65=0.35$	**1**
2	$P(I\cap W)=P\left(W/I\right)\times P(I)=0.7\times 0.8=0.56$; $P(A\cap W)=P\left(W/A\right)\times P(A)=0.8\times 0.1=0.08$; $P(W\cap T)=P(W)-P(W\cap I)-P(W\cap A)=0.65-0.56-0.08=0.01$ $P\left(W/T\right)=\dfrac{P(W\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0.01}{0.1}=0.1.$	**3**
3	$P\left(I/M\right)=\dfrac{P(I\cap M)}{P(M)}=\dfrac{0.8\times 0.3}{0.35}=0.68.$	**1.5**
4	$P(B)=\dfrac{C_{160}^{2}\times C_{20}^{1}+C_{160}^{1}\times C_{20}^{2}}{C_{200}^{3}}=...=\dfrac{1424}{6567}\approx 0.216.$	**1.5**

III- (7 points)

Q	Correction	Grade
1	$U_1=\left(1+\frac{0,06}{12}\right)\times 200=219{,}1$ et $U_2=\left(1+\frac{0.06}{12}\right)\times 219.1=218.1955.$	**1**
2	$U_{n+1}=\left(1+\frac{0.06}{12}\right)\times U_n-2=1.005\,U_n-2$	**1**
3-a	$V_{n+1}=U_{n+1}-400=1.005\,U_n-402=1.005\left(U_n-400\right)=1.005\,V_n$ $q=1.005$ and $V_0=U_0-400=220-400=-180$	**1.5**
3-b	$V_n=V_0\times q^n=-180\times\left(1.005\right)^n$ and $U_n=V_n+400=-180\times\left(1.005\right)^n+400$	**1**
3-c	$U_{n+1}-U_n=-180\times\left(1.005\right)^{n+1}+400+180\times\left(1.005\right)^n-400$ $=-180\times\left(1.005\right)^n\left(1.005-1\right)=-0.9\times\left(1.005\right)^n<0$	**1**
3-d	$U_n<\frac{U_0}{2}$; $-180\times\left(1.005\right)^n+400<110$; $\left(1.005\right)^n>\frac{29}{18}$; $n>\frac{\ln\left(29/18\right)}{\ln(1.005)}$; $n>95.6$; $n=96$ then after 8 years.	**1.5**

IV- (14 points)

Q	Correction	Grade
A-1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=3$ then (d) : y = 3 is a horizontal asymptote at $+\infty$	**1**
A-2	$f'(x)=x(x-2)e^{-x}$ same sign as $x-2$ then: $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & 0 & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 3 & \searrow & 3-\frac{4}{e^2} & \nearrow & 3 \end{array}$	**1.5**
A-3		**1.5**
A-4-a	$F'(x)=(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x+2)+3=f(x)$	**1.5**
A-4-b	$A=\int_0^2 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^2=F(2)-F(0)=\frac{10}{e^2}+6-2=\left(4+\frac{10}{e^2}\right)u^2$	**1.5**
B-1	$f\left(6\right)=-36e^{-6}+3=2.910765$ the average cost is: 2 910 765 LL.	**1.5**
B-2-a	According to the table of variations the average cost production is minimal for $x=2$ then 200 liters. The minimal average cost is $f(2)=2.45866$ then 245 866 LL	**1.5**
B-2-b	y = 2,3 < f(2) (The minimum of f) then no gain.	**1.5**
B-3-a	$C_T\left(x\right)=x\,f(x)=-x^3e^{-x}+3x.$	**1**
B-3-b	$C_m\left(x\right)=\left(x^3-3x^2\right)e^{-x}+3$; $C_M\left(x\right)=C_m\left(x\right)$; $\left(x^3-3x^2\right)e^{-x}+3=-x^2e^{-x}+3$; $x^3-3x^2=-x^2$; $x^2\left(x-2\right)=0$; $x=0$ or $x=2$ but $0\notin\left[0.2\ ;\ 9\right]$ then $x=2$ therefore for a production of 200 liters.	**1.5**