

عدد المسائل : اربع
مسابقة في مادة الرياضيات
الاسم :
الرقم :
المدة : ساعتان

ملاحظة : يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختران المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 points)

Une société d'assurance, offre à ses employés un prix spécial d'un contrat annuel d'assurance de vie, selon le tableau suivant :

Age de l'employé en années	25	26	27	28	29
Rang x_i	0	1	2	3	4
Prix annuel y_i en centaines de milliers LL	2	2,5	3,25	3,75	4

- 1) a- Calculer \bar{x} et \bar{y} , les moyennes respectives des deux variables x et y .
b- Ecrire une équation de la droite de régression (D) de y en x .
- 2) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$, le point moyen G ainsi que la droite (D) dans un repère orthogonal d'unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
- 3) On suppose que ce modèle reste valable jusqu'à l'âge de 35 ans.
Estimer le prix d'un contrat annuel pour un employé âgé de 31 ans.
- 4) Quel est le pourcentage de l'augmentation du prix du contrat d'assurance, entre un employé âgé de 25 ans et un autre âgé de 31 ans ?

II - (4 points)

Les employés d'un collège sont répartis en trois catégories : Enseignants - Administratifs - Techniciens.

- 80% des employés sont des enseignants dont 70% sont des femmes.
- 10% des employés sont des administratifs dont 80% sont des femmes.
- 65% des employés sont des femmes .

On choisit au hasard un employé de ce collège et on considère les événements suivants :

- E : « l'employé choisi est un enseignant »
A : « l'employé choisi est un administratif »
T : « l'employé choisi est un technicien »
H : « l'employé choisi est un homme »
F : « l'employé choisi est une femme ».

- 1) Calculer la probabilité $P(H)$.
- 2) Calculer $P(E \cap F)$; $P(A \cap F)$ et vérifier que $P(F/T) = 0,1$.
- 3) Sachant que l'employé choisi est un homme, qu'elle est la probabilité qu'il soit enseignant ?
- 4) Dans cette question, on suppose que le nombre des employés de ce collège est 200 employés, et que les noms de ces employés sont inscrits chacun sur un carton et que ces cartons sont placés dans une boîte.

On tire simultanément et au hasard, 3 cartons de cette boîte.

Quelle est la probabilité de l'événement B : « avoir au moins un carton portant le nom d'un enseignant, au moins un carton portant le nom d'un administratif et aucun carton portant le nom d'un technicien » ?

III- (4 points)

A la fin de juillet 2015, un retraité place dans une banque une somme de 220 millions LL à un taux d'intérêt annuel de 6% avec capitalisation mensuelle des intérêts. Cette personne décide de retirer à la fin de chaque mois 2 millions LL pour ses dépenses après capitalisation des intérêts.

On désigne par l'entier naturel n le rang du mois après le placement et par U_n le montant, en millions LL, que cette personne aura dans son compte à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois après le retrait des 2 millions LL. Ainsi $U_0 = 220$.

- 1) Vérifier que $U_1 = 219,1$ et calculer U_2 .
- 2) Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 1,005 U_n - 2$.
- 3) Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n - 400$.
 - a- Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b- Montrer que $U_n = -180 \times (1,005)^n + 400$
 - c- Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
 - d- Dans combien d'années, le montant du compte devient-il, pour la première fois, inférieur à la moitié du compte initial ?

IV- (8 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = -x^2 e^{-x} + 3$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote (d) à (C).
- 2) Montrer que $f'(x) = x(x-2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de f .
- 3) Tracer (d) et (C).
- 4) Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 3x$.
 - a- Démontrer que F est une primitive de f .
 - b- En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

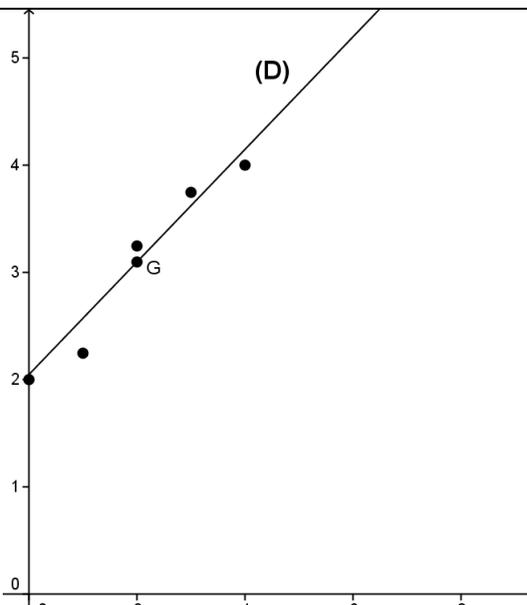
Partie B

Une entreprise produit de la peinture. Toute la production est vendue.

Le coût moyen de production de peinture exprimé en centaines de milliers LL est donné par $f(x) = -x^2 e^{-x} + 3$ où x est exprimé en centaines de litres et $x \in [0, 2; 9]$.

- 1) Déterminer, en LL, le coût moyen de production de 600 litres de peinture.
- 2) a- Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire, pour que le coût moyen de production soit minimal ? Quel est alors ce coût moyen en LL ?
b- Si le prix de vente de 100 litres de peinture est fixé à 230 000 LL, l'entreprise réalise-t-elle un gain ? Expliquer.
- 3) a- Exprimer le coût total $C_T(x)$ en fonction de x .
b- Combien de litres de peinture, l'entreprise doit produire, pour que le coût moyen de la production soit égal au coût marginal ?

I- (7 points)

Q	Correction	Note
1-a	$\bar{x} = 2 ; \bar{y} = 3,1$	1
1-b	$(D_{\frac{y}{x}}) : y = 0,525x + 2,05$	1
2	<p>G(2,3,1)</p> 	2
3	âge de 31 → x = 6 donc y = 0,525(6) + 2,05 = 5,2 alors 520 000 LL	1,5
4	$\frac{5,2-2}{2} = 1,6$ soit 160% Le pourcentage d'augmentation	1,5

II- (7 points)

Q	Correction	Note
1	$P(H) = 1 - P(F) = 1 - 0,65 = 0,35$	1
2	$P(E \cap F) = P\left(\frac{F}{E}\right) \times P(E) = 0,7 \times 0,8 = 0,56 ;$ $P(A \cap F) = P\left(\frac{F}{A}\right) \times P(A) = 0,8 \times 0,1 = 0,08 ;$ $P(F \cap T) = P(F) - P(F \cap E) - P(F \cap A) = 0,65 - 0,56 - 0,08 = 0,01$ $P\left(\frac{F}{T}\right) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,1} = 0,1.$	3
3	$P\left(\frac{E}{H}\right) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,8 \times 0,3}{0,35} = 0,68.$	1,5
4	$P(B) = \frac{C_{160}^2 \times C_{20}^1 + C_{160}^1 \times C_{20}^2}{C_{200}^3} = \dots = \frac{1424}{6567} \approx 0,216.$	1,5

III- (7 points)

Q	Correction	Note
1	$U_1 = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right) \times 200 = 219,1$ et $U_2 = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right) \times 219,1 = 218,1955$.	1
2	$U_{n+1} = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right) \times U_n - 2 = 1,005 U_n - 2$	1
3-a	$V_{n+1} = U_{n+1} - 400 = 1,005 U_n - 402 = 1,005 (U_n - 400) = 1,005 V_n$ $q = 1,005$ et $V_0 = U_0 - 400 = 220 - 400 = -180$	1,5
3-b	$V_n = V_0 \times q^n = -180 \times (1,005)^n$ et $U_n = V_n + 400 = -180 \times (1,005)^n + 400$	1
3-c	$U_{n+1} - U_n = -180 \times (1,005)^{n+1} + 400 + 180 \times (1,005)^n - 400$ $= -180 \times (1,005)^n (1,005 - 1) = -0,9 \times (1,005)^n < 0$	1
3-d	$U_n < \frac{U_0}{2}$; $-180 \times (1,005)^n + 400 < 110$; $(1,005)^n > \frac{29}{18}$; $n > \frac{\ln(29/18)}{\ln(1,005)}$; $n > 95,6$; la plus petite valeur de l'entier naturel n est 96, donc dans 8 ans.	1,5

IV- (14 points)

Q	Correction	Note													
A-1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ donc (d) : $y = 3$ est une asymptote horizontale en $+\infty$	1													
A-2	$f'(x) = x(x-2)e^{-x}$ même signe que $x-2$ alors:	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="padding: 2px;">x</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">f'(x)</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">-</td> <td style="padding: 2px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">f(x)</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;"></td> <td style="padding: 2px;">3</td> </tr> </table> $3 - \frac{4}{e^2}$	x	0	2	$+\infty$	f'(x)	0	-	0	f(x)	3		3	1,5
x	0	2	$+\infty$												
f'(x)	0	-	0												
f(x)	3		3												
A-3		1,5													
A-4-a	$F'(x) = (2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2+2x+2) + 3 = f(x)$	1,5													
A-4-b	$A = \int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{10}{e^2} + 6 - 2 = \left(4 + \frac{10}{e^2}\right) u^2$	1,5													
B-1	$f(6) = -36e^{-6} + 3 = 2,910765$ Le coût moyen est: 2 910 765 LL.	1,5													
B-2-a	D'après le tableau de variations le coût est minimal pour $x = 2$ donc 200 litres Le coût minimal est $f(2) = 2,45866$ alors 245 866 LL	1,5													
B-2-b	On trace la droite d'équation $y = 2,3 < f(2)$ (Le minimum de f) alors pas de gain	1,5													
B-3-a	$C_T(x) = x f(x) = -x^3 e^{-x} + 3x$.	1													
B-3-b	$C_m(x) = (x^3 - 3x^2)e^{-x} + 3$; $C_M(x) = C_m(x)$; $(x^3 - 3x^2)e^{-x} + 3 = -x^2 e^{-x} + 3$; $x^3 - 3x^2 = -x^2$; $x^2(x-2) = 0$; $x = 0$ ou $x = 2$ or $0 \notin [0, 2 ; 9]$ donc $x = 2$ alors pour une production de 200 litres.	1,5													