وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٦ العاديّة الاربعاء ١٥ حزيران ٢٠١٦

عدد المسائل: أربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة :يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المُرشّح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne les deux points $A(3;1;1)$ et $F(2;2;-2)$ et la droite (d) définie par :

$$(d):\begin{cases} x=-t \\ y=t+2 \\ z=t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

1) Soit (P) le plan passant par le point F et contenant la droite (d).
   Vérifier qu'une équation du plan (P) est : $x+z=0$
2) Soit $E(1;1;-1)$ un point de la droite (d).
   Vérifier que E est le projeté orthogonal de A sur (P).
3) Soit L le point de la droite (d) d'abscisse $x_L \neq 0$. Déterminer les coordonnées du point L pour que le triangle EFL soit isocèle de sommet principal E.
4) Calculer le volume du tétraèdre AEFL.

II- (4 points)

On dispose d'une boite V contenant six cartons numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 7 et 9
et de deux urnes U_1 et U_2 ;

- L'urne U_1 contient 3 boules rouges et 5 boules noires.
- L'urne U_2 contient 4 boules rouges et 4 boules noires.

On tire au hasard un carton de la boite V.
Si le carton tiré porte un numéro pair, on tire simultanément et au hasard deux boules de U_1.
Si le carton tiré porte un numéro impair, on tire simultanément et au hasard deux boules de U_2.
On considère les événements suivants:

A : " le carton tiré porte un numéro pair"
B : " le carton tiré porte un numéro impair"
R : " les deux boules tirées sont rouges"
N: " les deux boules tirées sont noires".

1) a- Calculer la probabilité $P\left(R/A\right)$ et déduire que $P(A\cap R)=\dfrac{1}{28}$.
   b- Calculer $P(B\cap R)$ et $P(R)$.
2) Montrer que $P(N)=\dfrac{11}{42}$.
3) Sachant qu'on a tiré deux boules noires, calculer la probabilité qu'elles proviennent de U_1.

III- (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points $E(2i)$, $A(-i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ où z et z' sont deux nombres complexes avec $z' = 2i - \frac{2}{z}$ $(z \neq 0)$.

1) a- Montrer que $z(z' - 2i) = -2$.

b- Calculer $\arg(z) + \arg(z' - 2i)$.

2) a- Vérifier que $z' = \frac{2i(z+i)}{z}$

b- Montrer que $OM' = \frac{2AM}{OM}$

c- Montrer que si M se déplace sur la médiatrice de $[OA]$ alors M' se déplace sur un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a- Montrer que $x' = \frac{-2x}{x^2+y^2}$ et $y' = 2 + \frac{2y}{x^2+y^2}$

b- Montrer que si $x = y$ alors les droites (OM) et (EM') sont perpendiculaires.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x) = e^x - \frac{2e^x}{x+1}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x)$. Déduire une asymptote (D) à (C).

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et calculer $f(2,5)$.

2) Prouver que $f'(x) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Soit (d) la droite d'équation $y = x$.

La courbe (C) coupe la droite (d) en un point unique A d'abscisse α.

Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.

4) a- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

b- Tracer (D), (d) et (C).

5) a- Démontrer que, sur $\left]-1;+\infty\right[$, f admet une fonction réciproque f^{-1}.

b- Tracer (C'), la courbe représentative de f^{-1}, dans le même repère que (C).

6) On suppose que l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à 0,53 unité d'aire.

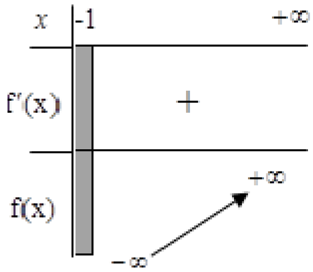
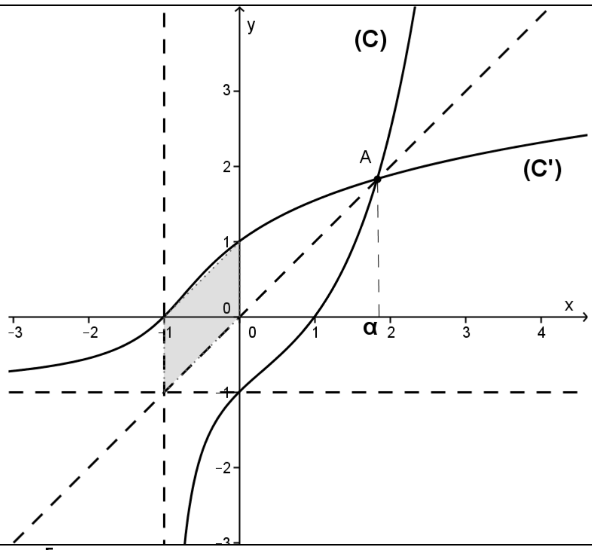
Calculer l'aire du domaine limité par (C'), la droite (d), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$.

وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات الشهادة الثانوية العامة الفرع : علوم الحياة	دورة ٢٠١٦ العادية
مشروع معيار التصحيح	مسابقة في مادة الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

I	Corrigé	N
1	Vérifier que F appartient à (P) et (d) est incluse dans (P)	1
2	E appartient à (d) alors E appartient à (P) et $\overrightarrow{AE}(-1,0,-2)$ donc $\overrightarrow{AE}=-2\overrightarrow{N_{(P)}}$	1
3	$EF^2=3$ et $EL^2=3(t+1)^2$ alors $3(t+1)^2=3\Rightarrow$ $t=-2$ ou $t=0$ donc $L(2,0,-2)$	1
4	$V=\frac{1}{6}\left\lvert\overrightarrow{AL}.(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AF})\right\rvert=\frac{\lvert-8\rvert}{6}=\frac{4}{3}u^3$	1

II		Corrigé	N
1	a	$P\left(R/A\right)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$; $p(A\cap R)=p(A).\ P\left(R/A\right)=\frac{2}{6}\times\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$	1
	b	$p(B\cap R)=p(B).\ P\left(R/B\right)=\frac{4}{6}\times\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{1}{7}$ $P(R)=p(A\cap R)+p(B\cap R)=\frac{5}{28}$.	1
2		$P(N)=p(A\cap N)+p(B\cap N)=p(A).p(N/A)+p(B).p(N/B)=$ $\frac{1}{3}\times\frac{C_5^2}{C_8^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{11}{42}$.	1
3		$p(A/N)=\frac{p(A\cap N)}{p(N)}=\frac{5/42}{11/42}=\frac{5}{11}$	1

III		Corrigé	N
1	a	$z'-2i=\frac{-2}{z}$ alors $z(z'-2i)=-2$	0.5
	b	$\arg(z(z'-2i))=\arg z+\arg(z'-2i)=\arg(-2)=\pi[2\pi]$	0.5
2	a	$z'=\frac{2i(z+i)}{z}$	0.5
	b	$OM'=\left\lvert\frac{2i(z+i)}{z}\right\rvert=\frac{\lvert 2i(z+i)\rvert}{\lvert z\rvert}=\frac{\lvert 2i\rvert\lvert z+i\rvert}{\lvert z\rvert}=\frac{2AM}{OM}$	0.5
	c	M appartient à la médiatrice de $[OA]$ alors MA=MO donc $OM'=2$, par suite M' varie sur le cercle de centre O et de rayon 2.	0.5
3	a	$x'=\frac{-2x}{x^2+y^2}$ et $y'=2+\frac{2y}{x^2+y^2}$	1
	b	x= y alors $M'(\frac{-1}{x},2+\frac{1}{x})$ donc $\overrightarrow{EM'}(\frac{-1}{x},\frac{1}{x})$ et $\overrightarrow{OM}(x,y)$ $\overrightarrow{EM'}.\ \overrightarrow{OM}=0$ alors $(EM')\perp(OM)$.	0.5

IV		Corrigé	N
1	a	$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$ donc la droite (D) : x = -1 est une asymptote à (C) .	0.5
	b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (1)(+\infty) = +\infty$; f(2.5) $\approx 5{,}22$.	1
2		$f'(x) = e^x - \left(\dfrac{2e^x(x+1) - 2e^x}{(x+1)^2}\right)$ $= \left(\dfrac{(x+1)^2 - (x+1) + 2}{(x+1)^2}\right)e^x$ $= \left(\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)e^x > 0$ pour tout $x \neq -1$  	1
3		Soit $\phi(x) = f(x) - x$. $\phi(1.8) \approx -0.07 < 0$ et $\phi(1.9) \approx 0.17 > 0$	1
4	a	Si x =0, alors f(0) = -1 , donc (C) coupe l'axe des ordonnées en (0,-1) Si f(x) = 0, alors x = 1, donc (C) coupe l'axe des abscisses en (1; 0).	0.5
	b	 	1
5	a	Sur $]-1;+\infty[$, f est continue et strictement croissante, elle admet une fonction réciproque f^{-1}.	0.5
	b	(C') et (C) sont symétriques par rapport à y = x. Voir le graphique	1
6		A cause de la symétrie par rapport à la droite y = x L'aire de la région limitée par (C'), la droite (d), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$ est égale à (0.53 + l'aire du triangle isocèle de côté 1) soit 1.03 unité d'aire.	1.5