وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات الرسمية	امتحانات الشهادة الثانوية العامة فرع: العلوم العامة	دورة العام ٢٠١٦ العاديّة الخميس ٩ حزيران ٢٠١٦

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2,5 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant**,** la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	L'équation $\arccos(3x-1)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$ est vérifiée pour $x=$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
2	z est un nombre complexe. Si $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$; alors $z^2=$	$4e^{i\frac{\pi}{4}}$	$8e^{i\frac{\pi}{4}}$	$(2+\sqrt{2})e^{-i\frac{\pi}{4}}$	$4e^{-i\frac{\pi}{4}}$
3	$\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{x^2+1}dx=$	$2\arctan(a)$	$2[a-\arctan(a)]$	0	$a-\arctan(a)$
4	Si F est une fonction définie par : $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt$; alors $F'(1)=$	$\sqrt{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$
5	Une suite (U_n) est définie par $U_0=5$ et $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$. Si (U_n) est convergente alors sa limite est :	0	2	-1	$\sqrt{2}$

II-(2,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le plan (P) d'équation : $x+y-z+1=0$, le point $A\left(1\ ;\ 0\ ;-1\right)$ et la droite (d) définie par :
$x=t-1\ \ ;\ \ y=t\ \ ;\ \ z=-t+3$ (t est un paramètre réel).

1) a- Démontrer que la droite (d) est perpendiculaire au plan (P).
   b- Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de (d) et (P).

2) Vérifier que le point $K\left(0\ ;-1\ ;\ 0\right)$ est le projeté orthogonal de A sur (P).

3) Soit (Δ) la droite passant par H, contenue dans le plan (P) et perpendiculaire à la droite (KH).
   a- Vérifier que $\vec{V}\left(-2\ ;1\ ;-1\right)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).
   b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).

4) Le cercle (C) de centre H et de rayon $\sqrt{6}$, contenu dans le plan (P), coupe la droite (Δ) en deux points T et S.
   Déterminer les coordonnées de T et de S.

III- (3 points)

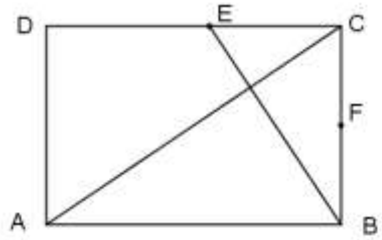
On donne :

- Un sac S_1 contenant **un** billet de 20 000 LL et **trois** billets de 50 000 LL.
- Un sac S_2 contenant **deux** billets de 20 000 LL et **deux** billets de 100 000 LL.
- Un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et parfaitement équilibré.

1) On lance ce dé une fois.
   Si la face apparue sur le dé est 5 ou 6 on tire au hasard un billet du sac S_1, sinon on tire au hasard un billet du sac S_2.
   Soit les évènements :
   A : « Obtenir un billet de 20 000 LL».
   B : « Obtenir un billet de 50 000 LL ».
   C : « Obtenir un billet de 100 000 LL ».
   E : « La face apparue sur le dé est 5 ou 6 ».
   a- Vérifier que la probabilité de réaliser l'évènement A est $P(A)=\dfrac{5}{12}$.
   b- Quel billet est le plus probable d'être tiré ? Justifier.

2) On met tous les billets des deux sacs S_1 et S_2 dans un seul sac S.
   On lance de nouveau le même dé.
   Si la face apparue sur le dé est 5 ou 6 on tire simultanément et au hasard deux billets du sac S, sinon on tire simultanément et au hasard trois billets de S.
   a- Vérifier que la probabilité d'avoir une somme totale inférieure à 80 000 LL est $\dfrac{13}{84}$.
   b- La somme totale obtenue est inférieure à 80 000 LL. Quelle est la probabilité que la face apparue sur le dé est 3?

IV- (3 points)



ABCD est un rectangle direct tel que AB = 3,
AD = 2 et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
F est le milieu du segment [BC].
La perpendiculaire menée de B à la droite (AC) coupe (DC) en E.
S est la similitude qui transforme A en B et B en F.

1) Déterminer le rapport k et un angle α de S.

2) Justifier que (BE) est l'image par S de la droite (AC).

3) Déterminer l'image par S de (BC) et déduire le point H image de C par S.

4) Déterminer l'image par S du rectangle ABCD .

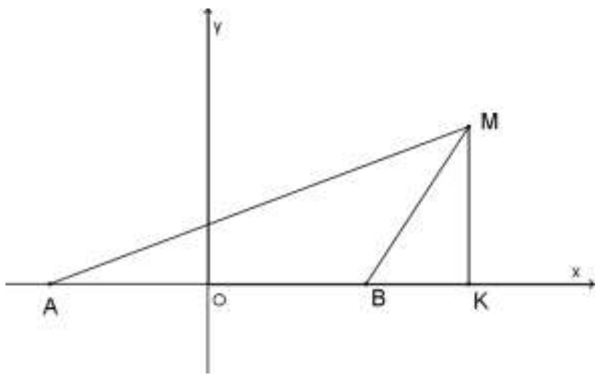
5) Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

   Ecrire la forme complexe de S et déduire l'affixe de son centre W.

6) M est un point d'affixe $z=3\cos\theta+2i\sin\theta$ (avec $0<\theta<\frac{\pi}{2}$).

   a- Démontrer que M varie sur l'ellipse (Γ) de centre A, dont B et D sont deux de ses sommets.
   b- Déterminer une équation de (Γ') image de l'ellipse (Γ) par S.

V- (2 points)



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$,
on considère les points $A\left(-1;0\right)$ et $B\left(1;0\right)$.
Soit $M\left(x\ ;\ y\right)$ un point quelconque du plan tel que $|x|\geq 1$ et K le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
On suppose que : $MK^2=AK\times BK$.

1) Démontrer que M varie sur l'hyperbole (H) d'équation $x^2-y^2=1$.

2) a- Trouver les coordonnées des sommets et des foyers de (H).
   b- Ecrire les équations des asymptotes de (H).
   c- Tracer (H).

3) On considère le point $G(0\ ;-1)$ et la parabole (P) d'équation $y=\frac{1}{2}x^2$.

   Soit L le point d'abscisse positive, commun à (P) et (H).
   Prouver que (GL) est une tangente commune à (P) et (H).

VI- (7 points)

Partie A :

On donne l'équation différentielle $(E): y'+y=1+x+e^{-x}$.

1) Vérifier que $u=x+xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).
2) Soit $y=z+u$ où z est une fonction de x.
   a- Former l'équation différentielle (E') satisfaite par z.
   b- Résoudre (E') et déduire la solution générale de (E).
   c- Trouver la solution particulière de (E) vérifiant $y(0)=1$.

Partie B :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=1-xe^{-x}$.

1) Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de h.
2) Vérifier que, pour tout réel x , $h(x)>0$.

Partie C :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+(x+1)e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, l'unité graphique est **2 cm** .

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) Soit (d) la droite d'équation $y=x$.
   a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).
   b- Montrer que (d) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3) a- Vérifier que $f'(x) = h(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
   b- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W dont on déterminera les coordonnées.
   c- Trouver les coordonnées du point E de (C) où la tangente (D) à (C) est parallèle à (d).

4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine α.Vérifier que $-0,7<\alpha<-0,6$.

5) Tracer (d), (D) et (C).

6) Soit g la fonction réciproque de f et (G) la courbe représentative de g dans le même repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
   a- Tracer (G).
   b- Résoudre l'inéquation $\ln\left(-g(x)\right)>0$.

7) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (G), la droite (d) et l'axe des abscisses.

Barème- Math SG – Première Session - 2016

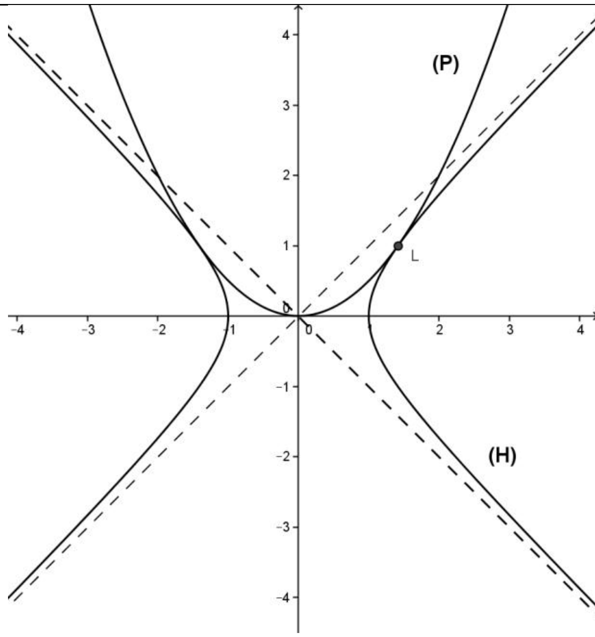
QI	Solution	N
1	$\arccos(3x-1)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$; $\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}$; $\cos(\arccos(3x-1))=\sin(\arccos x)$ $3x-1=\sqrt{1-x^2}$; donc $x=0$ ou $x=\frac{3}{5}$ ($x=0$ rejeter) Ou par calculatrice. (c)	1
2	$z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $z^2=2\sqrt{2}-i\sqrt{2}=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ou soit $\theta=\arg(z)$ donc $z=-\frac{\pi}{8}$ et $\|z\|=2$ donc $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (d)	1
3	$\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^a\frac{x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^a\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=2(a-\arctan a).$ (b)	1
4	$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt,\ F'(x)=\sqrt{1+x^2}$; $F'(1)=\sqrt{2}$ (a)	1
5	$\lim_{n\to\infty}u_n=L,\ L=\sqrt{2+L}$, $L^2-L-2=0$ $(L\ge 0)$, L=2 ou L=-1(rej) (b)	1

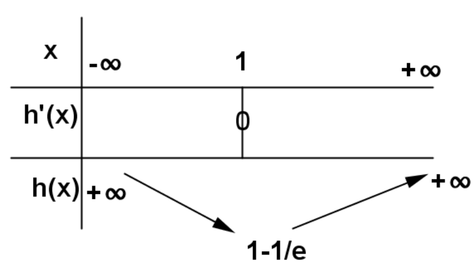
QII	Solution	N
1a	$\overrightarrow{v_d}(1,1,-1)=\overrightarrow{n_P}$ alors (d) est perpendiculaire au plan (P).	0.5
1b	t-1+t+t-3+1=0 donc t=1 . H(0,1,2)	1
2	$\overrightarrow{AK}(-1,-1,1)=-\overrightarrow{n}_{(P)}$ et $K\in(P)$	1
3a	$\overrightarrow{V_{(\Delta)}}=\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{n_{(P)}}$ ou $\overrightarrow{V}_{(\Delta)}.\overrightarrow{AH}=0$ et $\overrightarrow{V}_{(\Delta)}.\overrightarrow{V}_{(d)}=0$	1
3b	$x=-2k,\ y=k+1,\ z=-k+2.$	0.5
4	$R=\sqrt{6}$; $M\in(\Delta)$ $HM^2=R^2$ donc $6k^2=6$, k= ±1 $T(-2,2,1),S(2,0,3)$	1

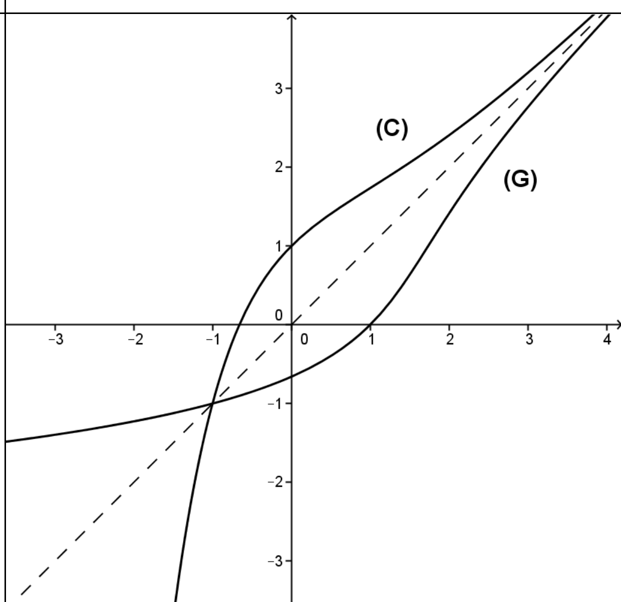
QIII	Solution	N
1a	$P(A)=P(E\cap A)+P(\overline{E}\cap A)=P(E)\times P(A/E)+P(\overline{E})\times P(A/\overline{E})=\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}=\frac{5}{12}$	1.5
1b	$P(B)=\frac{1}{4}$ et P(C)= 1-[P(B)+P(A)]= $\frac{1}{3}$,donc le billet 20 000 a la plus grande probabilité	1.5
2a	$P(S<80\ 000)=\frac{2}{3}\left(\frac{C_3^2}{C_8^2}\right)+\frac{2}{6}\left(\frac{C_3^1\times C_3^1}{C_8^2}\right)+\frac{4}{8}\left(\frac{C_3^3}{C_8^3}\right)=\frac{13}{84}$	1.5
2b	$P(\text{face}3/S<80000)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{C_3^3}{C_8^3}}{\frac{13}{84}}=\frac{1}{52}$	1.5

QIV	Solution	N
1	$\left.\begin{matrix} A \to B \\ B \to F \end{matrix}\right\}$ $BF = KAB,\ K=\frac{1}{3}, \alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}\right) = \frac{\pi}{2}$	0.5
2	S(AC) est une droite passant par B et perpendiculaire à (AC) donc (BE).	0.5
3	S(BC) est une droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à (BC) donc $\left.\begin{matrix} (AC) \to (BE) \\ (BC) \to (\Delta) \end{matrix}\right\}$ donc S(C) =H=$(\Delta) \cap (BE)$	1.5
4	S(ABCD)=BFHP avec P le quatrième sommet du rectangle BFHP	0.5
5	$z' = \frac{1}{3}iz + 3,\ z_w = \frac{27}{10} + \frac{9}{10}i$	1
6a	$z = 3\cos\theta + 2i\sin\theta = x + iy$ donc $\cos\theta = \frac{x}{3}$ et $\sin\theta = \frac{y}{2}$, donc$(\Gamma) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ Centre A(0,0). Sommets M(3,0)=B et N(0,2)=D.	1
6b	$z' = \frac{1}{3}i(x+iy) + 3$, $x = 3y'; y = 9 - 3x'$, donc(Γ') : $\frac{(x-3)^2}{4/9} + y^2 = 1$ **OU** : le centre de (Γ) est B(3,0), les deux sommets sont F et H tel que BF=1 et FH=2/3. Equation : $\frac{(x-3)^2}{4/9} + y^2 = 1$	1

QV	Solution	N
1	$MK^2 = AK \times BK$, $y^2 = \lvert x-1 \rvert \times \lvert x+1 \rvert = x^2 - 1$, $x^2 - y^2 = 1$	1
2a	Hyperbole équilatère. Sommets : A(-1,0) et B(1,0) . Foyers : F($\sqrt{2}$,0) et F'(-$\sqrt{2}$,0).	1
2b	Asymptotes : $y = x,\ \ y = -x$.	0.5

2c		0.5
3	$y^2-2y+1=0$ y=1 donc x= $\pm\sqrt{2}$. L($\sqrt{2}$,1)est le point commun de (P) et (H). G(0,-1); L($\sqrt{2}$,1). $(GL): y=\sqrt{2}x-1$	1

QVI		Answers	N
A	1	$u(x)=x+xe^{-x}$, u'(x)=1+$e^{-x}-xe^{-x}$.$1+e^{-x}-xe^{-x}+x+xe^{-x}=1+x+e^{-x}$ donc, u(x) est une solution.	0.5
	2a	z' + z = 0	0.5
	2b	$z=Ce^{-x}$ donc y=$Ce^{-x}+x+xe^{-x}$	0.5
	2c	y(0)=C=1donc y= $x+(x+1)e^{-x}$	0.5
B	1	$h(x)=1-xe^{-x}$, $h'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}$. $h'(x)>0$ si x>0  $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$	1

	2	Le minimum de h est positive donc h(x)>0 pour tout x.	0.5
	1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x} = -\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty$ donc la courbe (C) admet une direction asymptotique vers y'Oy.	1
	2a	$f(x) - y = (1+x)e^{-x}$. Si x=-1, (C) coupe (d) en A(-1,-1), si x>-1 (C) est au-dessus de (d). Six<-1 (C) est au-dessous de (d).	1
	2b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{e^x} = 0$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{e^x} = 0$ donc y=x est une asymptote à (C)	0.5
	3a	$f'(x) = h(x)$ donc $f'(x) > 0$ pour tout x	0.5
	3b	$f''(x) = h'(x)$ mais $h'(x) = 0$ pour x=1 donc W(1,1+2e^{-1}) est un point d'inflexion.	1
	3c	$f'(x) = 1$ donc $-xe^{-x} = 0$ donc $x = 0$ et $E(0,1)$	1
C	4	f est definie et continu strictement monotone passant de $-\infty$ a $+\infty$ alors l'equation f(x) =0 admet une seule racine α . $f(-0,7)\times f(-0,6) = -0,0958\times 0,1288 = -0,01<0$ alors $-0,7 < \alpha < -0,6$	1
	5		1
	6a	(G) est le symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y=x	1
	6b	$\ln(-g(x)) > 0; -g(x) > 0$ et $-g(x) > 1$ donc $g(x) < -1$ d'où d'ou $x \in]-\infty, -1[$	1.5

	7	A=$\int_{-1}^{0}[f(x)-x]=\int_{-1}^{0}(e^{-x}+xe^{-x})dx=4(e-2)\,cm^2$	1.5