وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات الرسمية

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

دورة العام ٢٠١٦ العاديّة
الخميس ٩ حزيران ٢٠١٦

عدد المسائل: ست	**مسابقة في مادة الرياضيات**	**الاسم:**
	المدة: أربع ساعات	**الرقم:**

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I) (علامتان ونصف العلامة)

في الجدول التالي يوجد جواب واحد فقط صحيح بين الأجوبة المقترحة لكل سؤال، أكتب رقم كل سؤال وبرِّر إجابتك له:

الرقم	الأسئلة	الإجابة: أ	ب	ج	د
١	إن حلّ المعادلة $\arccos(3x-1)+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ هو:	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
٢	z هو عدد مركّب، إذا كان $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ فإن $z^2=$	$4e^{i\frac{\pi}{4}}$	$8e^{i\frac{\pi}{4}}$	$(2+\sqrt{2})e^{-i\frac{\pi}{4}}$	$4e^{-i\frac{\pi}{4}}$
٣	$\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{x^2+1}dx=$	$2\arctan(a)$	$2[a-\arctan(a)]$	0	$a-\arctan(a)$
٤	$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt$; إذن $F'(1)=$	$\sqrt{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$
٥	إنّ المتتالية (U_n) معرّفة كما يلي $U_0=5$ و $U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$ إذا كان لهذه المتتالية نهاية فإن هذه النهاية هي:	0	2	-1	$\sqrt{2}$

II) (علامتان ونصف العلامة)

في الفضاء الإحداثي $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعرِّف المستوى (P) ذو المعادلة $x+y-z+1=0$ ، النقطة $A\left(1\,;\,0\,;-1\right)$

والمستقيم (d) ذو المعادلات $x=t-1\ \ ;\ \ y=t\ \ ;\ \ z=-t+3$ حيث أن t هو متغيِّر حقيقي.

١- أ- برهن أن المستقيم (d) متعامد مع المستوي (p).

ب- حدِّد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (d) مع المستوي (P).

٢- تحقَّق أن $K\left(0\,;-1\,;\,0\right)$ هي الإسقاط العامودي للنقطة A على المستوي (P).

٣- ليكن (Δ) هو المستقيم الموجود في المستوي (P)، الذي يمرّ بالنقطة H والمتعامد مع المستقيم (KH).

أ- تحقَّق أنَّ $\vec{V}\left(-2\,;1\,;-1\right)$ هو متجِّه موازٍ للمستقيم (Δ).

ب- أكتب معادلات المستقيم (Δ).

٤- نأخذ في المستوي (P) الدائرة (C) ذات المركز H ونصف القطر $\sqrt{6}$.

تتقاطع (C) مع (Δ) في النقطتين T و S. جدّ إحداثيات النقطتين T و S .

III) (ثلاث علامات)

كيس S_1 يحتوي على ورقة **واحدة** من فئة العشرين ألف ليرة، و**ثلاثة** أوراق من فئة الخمسين ألف ليرة. وكيس S_2 يحتوي على **ورقتين** من فئة العشرين ألف ليرة، و**ورقتين** من فئة المئة ألف ليرة.

١- نرمي مكعّباً متوازناً كلياً مرقماً من 1 إلى 6 ، مرةً واحدة.

إذا كان الوجه الظاهر للمكعب 5 أو 6 ، فإننا نسحب عشوائياً ورقة من الكيس S_1 ، وإذا كان وجه المكعب غير ذلك، فإننا نسحب عشوائياً ورقة من الكيس S_2

لتكن الأحداث التالية:

A: " نحصل على ورقة من فئة العشرين ألف ليرة"

B : " نحصل على ورقة من فئة الخمسين ألف ليرة"

C : " نحصل على ورقة من فئة المئة ألف ليرة"

E :" الوجه الظاهر للمكعَّب يحمل الرقم 5 أو 6"

أ- تحقَّق أن احتمال حصول حدث A هو $P(A)=\dfrac{5}{12}$

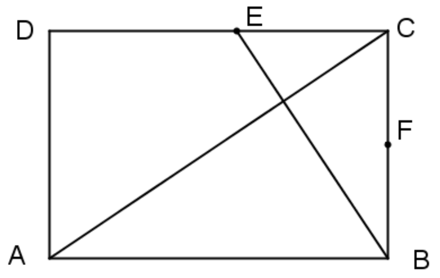
ب- ما هي الورقة ذات الاحتمال الأكبر في السحب؟ برر ذلك.

٢- تمَّ خلط جميع الأوراق من الكيسين ووضعها في كيس واحد S. يتمّ من جديد رمي المكعّب. إذا كان الوجه الظاهر للمكعّب هو 5 أو 6، فإننا نسحب ورقتين من S. وإذا كان الوجه غير ذلك سوف نسحب ثلاث ورقات من S.

أ- تحقَّق أن احتمال الحصول على مجموع يقلّ عن ثمانين ألف ليرة هو $\dfrac{13}{84}$.

ب- علماً أن المجموع أقلّ من ثمانين ألف ليرة، فما هو احتمال ظهور العدد ثلاثة على المكعّب؟

IV) (ثلاث علامات)



ABCD هو مستطيل حيث أنّ $AB = 3$ و $AD = 2$ و

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

لتكن F منتصف القطعة المستقيمة [BC].

ـ المستقيم المارّ بالنقطة B والمتعامد مع (AC) يتقاطع مع (DC) في النقطة E .

ليكن S التشابه الذي يحوِّل A إلى B و B إلى F .

١- حدِّد النسبة K والزاوية α لهذا التشابه.

٢- تحقَّق أن صورة المستقيم (AC) بهذا التشابه هو المستقيم (BE) .

٣- حدِّد صورة (BC) بواسطة هذا التشابه. استنتج النقطة H صورة النقطة C في هذا التشابه.

٤- حدِّد صورة المستطيل ABCD في هذا التشابه.

٥- ليكن المستوى الإحداثي $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث أن $\overrightarrow{Av} = \frac{1}{2}\ \vec{}\ D$ $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

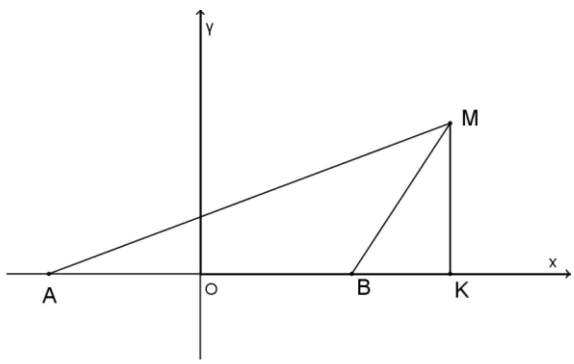
اكتب الشكل المركّب للتشابه S واستنتج العدد المركّب للمركز W.

٦- لتكن M نقطة متغيِّرة في المستوى الإحداثي عددها المركَّب z، حيث $z = 3\cos\theta + 2i\sin\theta\ ;\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

أ- برهن أن M تتحرَّك على القطع الناقص (Γ) حيث أنّ مركزه A ورأسين من رؤوسه الأربعة هما B وD .

ب- اكتب معادلة (Γ')صورة (Γ) بواسطة التشابه S .

V) (علامتان)



في المستوى الإحداثي $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ نعرّف النقطتين

$A(-1;0)$ و $B(1;0)$

لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة متغيِّرة في هذا المستوي، ، حيث أن $|x| \geq 1$ لنفترض ان النقطة K هي الإسقاط العامودي للنقطة M على المحور (x'x). لنفترض أن

$MK^2 = AK \times BK$

١- برهن أن النقطة M تتحرّك على القطع الزائد (H) ذو المعادلة $x^2 - y^2 = 1$.

٢-

ا - حدِّد رأسي وبؤرتي (H)

ب - اكتب معادلات المقاربين،

ج - ارسم (H) في المستوى الإحداثي.

٣- ليكن (P) هو القطع المكافئ ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2$. لنأخذ النقطة $G(0;-1)$ ولتكن L هي نقطة التقاء للقطعين (P) و (H) حيث أن $x_L > 0$.

برهن إن المستقيم (GL) هو مماس مشترك للقطعين (P) و (H)

VI (سبع علامات)

الجزء A :

١- لتكن معادلة التفاضل $(E): y'+y=1+x+e^{-x}$
تحقّق أن $u=x+xe^{-x}$ هي حلّ خاص للمعادلة (E) .
٢- لتكن $y=z+u$ حيث z هي دالة بالنسبة للمتغير x .
أ- شكِّل المعادلة التفاضلية (E') المحقّقة بواسطة z .
ب- حلّ المعادلة (E') واستنتج الحلّ العام للمعادلة (E) .
ت- حدِّد الحلّ الخاص للمعادلة (E) الذي يحقّق $y(0)=1$

الجزء B :

لتكن h هي الدالّة المعرّفة على **R** كما يلي: $h(x)=1-xe^{-x}$
١- احسب $h'(x)$ وأنشئ جدول التغير للدالّة h ،
٢- لكل عدد حقيقي x برهن أن $h(x)>0$.

الجزء C

نفترض في هذا القسم من المسألة أن $f(x)=x+(x+1)e^{-x}$. لنرمز بالحرف (C) إلى بيان هذه الدالّة في المستوي الإحداثي $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث أن وحدة القياس ٢ سم.

١- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثمّ اعطِ تفسيراً بيانياً للنتيجة.
٢- ليكن (d) هو المستقيم للمعادلة $y=x$.
أ- ناقش حسب قيم x موقع (C) بالنسبة للمستقيم (d).
ب- برهن أن (d) هو مقارب للبيان (C) عند $+\infty$.
٣- أ- تحقّق أن $f'(x)=h(x)$ وأنشئ جدول التغيير للدالّة f .
ب- برهن أن البيان (C) له نقطة انعطاف W يتمّ تحديد إحداثياتها.
ت- لتكن E هي نقطة على البيان (C) حيث يكون المماس فيها على (C) موازٍ للمستقيم (d) . حدّد إحداثيات النقطة E .
٤- برهن أن المعادلة $f(x)=0$ عندها حلّ وحيد α ثمّ تحقّق أن $-0,7<\alpha<-0,6$.
٥- ارسم المستيقمين $(d), (D)$ وكذلك البيان (C) في المستوي $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
٦- لتكن g هي الدالّة العكسية للدالّة f وليكن بيان هذه الدالّة (G).
أ- ارسم (G) في نفس المستوي $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
ب- حلّ المتباينة $\ln\left(-g(x)\right)>0$.
٧- احسب بالسم² مساحة المنطقة المحدّدة بواسطة البيان (G) ، بالمستقيم (d) والمحور $(x\,x')$.

Marking Scheme- Math GS – First Session - 2016

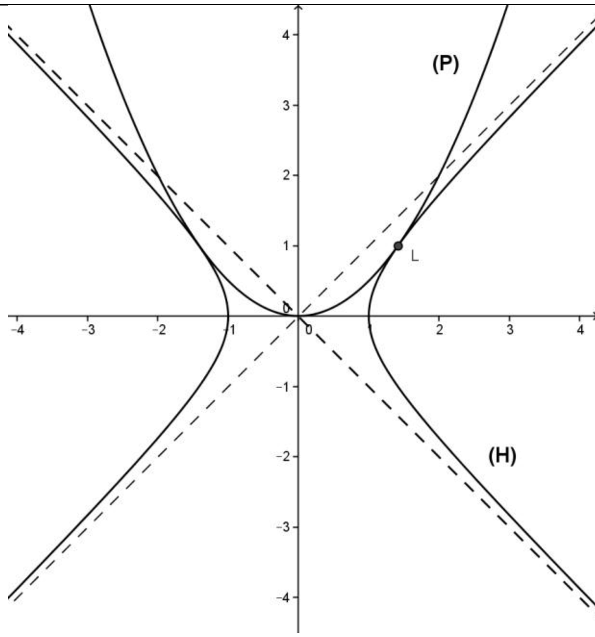
QI	Solution	G
1	$\arccos(3x-1)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$; $\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}$; $\cos(\arccos(3x-1))=\sin(\arccos x)$ $3x-1=\sqrt{1-x^2}$; thus $x=0$ or $x=\frac{3}{5}$ ($x=0$ rejected) **Or** by calculator. (c)	1
2	$z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $z^2=2\sqrt{2}-i\sqrt{2}=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ OR let $\theta=\arg(z)$ then $\arg(z)=\frac{7\pi}{8}$ and $\lvert z\rvert=2$ hence $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (d)	1
3	$\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^a\frac{x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^a\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=2(a-\arctan a).$ (b)	1
4	$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt,\ F'(x)=\sqrt{1+x^2}$; $F'(1)=\sqrt{2}$ (a)	1
5	$\lim_{n\to\infty}u_n=L,\ L=\sqrt{2+L}$, $L^2-L-2=0$ $(L\ge 0)$, L=2 ou L=-1(rej) (b)	1

QII	Solution	G
1a	$\vec{v_d}(1,1,-1)=\vec{n_P}$ then (d) is perpendicular to plane (P).	0.5
1b	t-1+t+t-3+1=0 thus t=1 . H(0,1,2)	1
2	$\overrightarrow{AK}(-1,-1,1)=-\vec{n}_{(P)}$ and $K\in(P)$	1
3a	$\overrightarrow{V_{(\Delta)}}=\overrightarrow{AH}\wedge\overrightarrow{n_{(P)}}$ **OR** $\vec{V}_{(\Delta)}.\overrightarrow{AH}=0$ et $\vec{V}_{(\Delta)}.\vec{V}_{(d)}=0$	1
3b	$x=-2k,\ y=k+1,\ z=-k+2.$	0.5
4	$R=\sqrt{6}$; $M\in(\Delta)$ $HM^2=R^2$ then $6k^2=6$, $k=\pm 1$ $T(-2,2,1),S(2,0,3)$	1

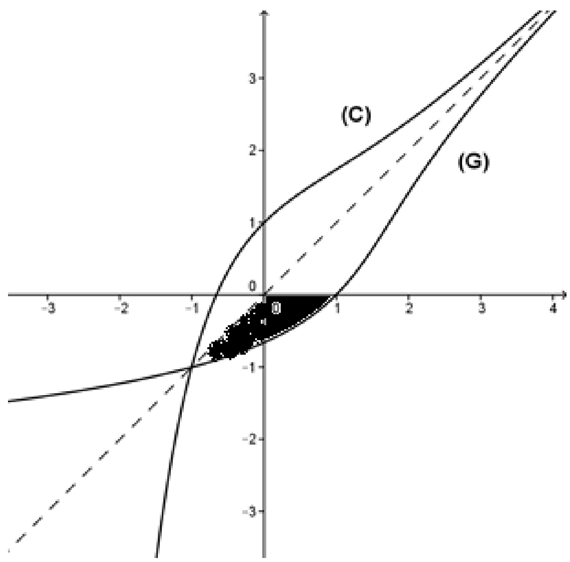
QIII	Solution	G
1a	$P(A)=P(E\cap A)+P(\bar{E}\cap A)=P(E)\times P(A/E)+P(\bar{E})\times P(A/\bar{E})=\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{4}=\frac{5}{12}$	1.5
1b	$P(B)=\frac{1}{4}$ and P(C)=1- [P(B)+P(C)]=$\frac{1}{3}$ thus the bill 20 000 is the most probable to be obtained.	1.5
2a	$P(S<80\ 000)=\frac{2}{3}\left(\frac{C_3^2}{C_8^2}\right)+\frac{2}{6}\left(\frac{C_3^1\times C_3^1}{C_8^2}\right)+\frac{4}{8}\left(\frac{C_3^3}{C_8^3}\right)=\frac{13}{84}$	1.5
2b	$P(\text{face}3/S<80000)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{C_3^3}{C_8^3}}{\frac{13}{84}}=\frac{1}{52}$	1.5

QIV	Solution	G
1	$\left.\begin{array}{l} A \to B \\ B \to F \end{array}\right\} BF = KAB,\ K=\frac{1}{3}, \alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}\right) = \frac{\pi}{2}$	0.5
2	S(AC) is a line passing through B and perpendicular to (AC) so it is (BE).	0.5
3	S(BC) is the line (Δ) passing through F and perpendicular to (BC) $\left.\begin{array}{l} (AC) \to (BE) \\ (BC) \to (\Delta) \end{array}\right\}$ thus S(C) =H=$(\Delta) \cap$ (BE)	1.5
4	S(ABCD)=BFHP with P being the fourth vertex of the rectangle BFHP	0.5
5	$z' = \frac{1}{3} iz + 3,\ z_W = \frac{27}{10} + \frac{9}{10} i$	1
6a	$z = 3\cos\theta + 2i\sin\theta = x + iy$ then $\cos\theta = \frac{x}{3}$ and $\sin\theta = \frac{y}{2}$, thus$(\Gamma): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ Center A(0,0). Vertices M(3,0)=B and N(0,2)=D.	1
6b	$z' = \frac{1}{3} i(x+iy) + 3$, $x = 3y'; y = 9 - 3x'$, thus $(\Gamma'): \frac{(x-3)^2}{4/9} + y^2 = 1$ **OR** : The center of (Γ') is B(3,0), the two vertices are F and H such that BF=1 and FH=2/3. Equation : $\frac{(x-3)^2}{4/9} + y^2 = 1$	1

QV	Solution	G
1	$MK^2 = AK \times BK$, $y^2 = \lvert x-1 \rvert \times \lvert x+1 \rvert = x^2 - 1$, $x^2 - y^2 = 1$	1
2a	Rectangular hyperbola. Vertices : A(-1,0) and B(1,0) . Foci: F($\sqrt{2}$,0) and F'(-$\sqrt{2}$,0).	1
2b	Asymptotes : $y = x,\ \ y = -x$.	0.5

2c		0.5
3	$y^2-2y+1=0$ $y=1$ thus $x=\pm\sqrt{2}$. $L(\sqrt{2},1)$ is a common point to (P) and (H). $G(0,-1)$; $L(\sqrt{2},1)$. $(GL): y=\sqrt{2}x-1$	1

QVI		Solution	G
A	1	$u(x)=x+xe^{-x}$, $u'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$ $.1+e^{-x}-xe^{-x}+x+xe^{-x}=1+x+e^{-x}$ thus, u(x) is a solution of the differential equation.	0.5
	2a	z' + z = 0	0.5
	2b	$z=Ce^{-x}$ thus $y=Ce^{-x}+x+xe^{-x}$	0.5
	2c	y(0)=C=1thus $y=x+(x+1)e^{-x}$	0.5
B	1	$h(x)=1-xe^{-x}$, $h'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=$ e^{-x} . $h'(x)>0$ si x>0 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$ x: $-\infty$; 1 ; $+\infty$ h'(x): 0 h(x): $+\infty$ ↘ 1-1/e ↗ $+\infty$	1
	2	The minimum of h is positive thus h(x)>0 for all real numbers x.	0.5
C	1	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ since $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ thus the curve (C) has an asymptotic direction parallel to y'Oy.	1

	2a	$f(x)-y=(1+x)e^{-x}$. If x=-1, (C) intersects (d) in A(-1,-1), if x>-1 (C) is above (d). If x<-1 (C) is below (d).	1
	2b	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ since $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{e^x}=0$ and since $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{e^x}=0$ then y=x is an asymptote to (C)	0.5
	3a	$f'(x)=h(x)$ thus $f'(x)>0$ for all x	0.5
	3b	$f''(x)=h'(x)$ but $h'(x)=0$ for x=1 thus W(1,1+2e^{-1}) is a point of inflection..	1
	3c	$f'(x)=1$ thus $-xe^{-x}=0$ so $x=0$ and E(0,1)	1
	4	f is defined, continuous and strictly increasing from $-\infty$ to $+\infty$ thus the equation f(x) =0 has a unique root α . $f(-0.7)\times f(-0.6)=-0.0958\times0.1288=-0.01<0$ hence $-0.7<\alpha<-0.6$	1
	5		1
	6a	(G) is the symmetric of (C) with respect to the line with equation y=x	1
	6b	$\ln(-g(x))>0; -g(x)>0$ and $-g(x)>1$ thus $g(x)<-1$ therefore $x\in\left]-\infty,-1\right[$	1
	7	A= $\int_{-1}^{0}[f(x)-x]=\int_{-1}^{0}(e^{-x}+xe^{-x})dx=4(e-2)\,cm^2$	1.5