وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات شهادة الثانوية العامة
فرع علوم الحياة

دورة العام 2013 الاستثنائية
السبت 24 آب 2013

عدد المسائل اربع	مسابقة في الرياضيات المدة ساعتان	الإسم: الرقم:

ملاحظة:- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A (6 ; 3 ; 2), le plan (P) d'équation $x - y + 2z - 7 = 0$ et la droite (d) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 3 \\ z = -1 \end{cases} \text{ où t est un paramètre réel.}$$

1) Montrer que A appartient à (P) et que (d) est parallèle à (P).

2) a- Vérifier que le point C (1 ; –2 ; –1) appartient à (d).

b- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (L) passant par C et perpendiculaire à (P).

c- Montrer que le point E $(3; -4; 3)$ est le symétrique de C par rapport à (P).

d- Déduire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) symétrique de la droite (AC) par rapport à (P).

II- (4 points)

Une urne contient sept boules: quatre rouges et trois vertes.

Un joueur tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1) a- Calculer la probabilité que le joueur tire exactement deux boules rouges.

b- Démontrer que la probabilité, que le joueur tire au moins deux boules rouges, est égale à $\frac{22}{35}$.

2) Après avoir tiré les trois boules, le joueur marque:

- 9 points s'il tire trois boules rouges ;
- 6 points s'il tire exactement deux boules rouges ;
- 4 points s'il tire exactement une boule rouge ;
- Zéro s'il tire trois boules vertes.

On désigne par X la variable aléatoire égale au score du joueur.

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Sachant que le joueur a marqué plus que 2 points, calculer la probabilité que son score soit multiple de 3.

III- (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A- On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2+2i$ et $z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(-1+i\right)$.

1) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_B}{z_A}$.

2) Démontrer que le triangle OAB est rectangle en O.

B- A chaque point M d'affixe z ($z \neq 0$), on associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = 1+i-\dfrac{2}{z}$.

On pose z = x + iy avec x et y sont deux réels.

1) Exprimer, en fonction de x et de y, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z'.

2) Démontrer que si la partie réelle de z' est égale à zéro, alors M se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

IV- (8 points)

A- On considère la fonction g définie sur]0; +∞ [par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2) Dresser le tableau de variations de g et déduire que g(x) > 0.

B- Soit f la fonction définie sur]0; +∞ [par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2) a-Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à (C).

b- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (Δ).

3) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer les coordonnées du point B de (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ).

5) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α puis vérifier que $0,34 < \alpha < 0,35$.

6) Tracer (Δ), (T) et (C).

7) Soit h la fonction définie sur]0;+∞ [par $h(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

a- Trouver une primitive H de h.

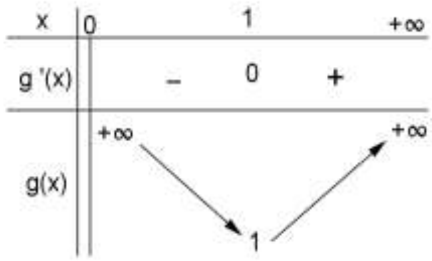
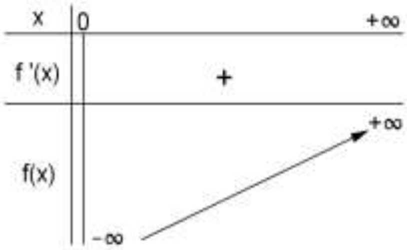
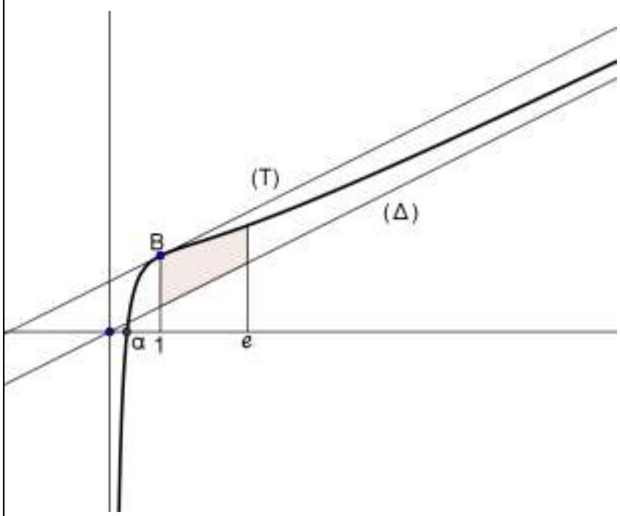
b- Déduire la mesure de l'aire du domaine limité par (C), (Δ) et les deux droites d'équations x = 1 et x = e.

Barème S.V Fr Session 2 2013

Q1	Réponses	N
1	$x_A - y_A + 2z_A - 7 = 0$ donc $A \in (P)$. et t –t+3 –2 –7=–6 $\neq 0$. Donc (d) est parallèle à (P).	1
2a	Pour : $x = x_C = 1$, t = 1 et $y = y_C = -2$, et z = $z_C = -1$; donc C $\in$ (d).	0,5
2b	$\overrightarrow{v_L}$ est parallèle à $\overrightarrow{n_P}(1;-1;2)$ et (L) passe par C, donc un système d'équations paramétriques de (L) est : x = m +1, y = – m– 2, z = 2m –1 où m est un paramètre réel.	0,5
2c	(L) coupe (P) au point I (m +1, – m –2, 2m –1), et I $\in$ (P), donc m = 1et I $(2;-3;1)$. D'autre part, le point I est le milieu de [EC], donc : $x_E = 2x_I - x_C = 3$, $y_E = 2y_I - y_C = -4$ et $z_E = 2z_I - z_C = 3$. **OU :** $\overrightarrow{CE}(2;-2;4)$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{n_P}$, (CE) est donc perpendiculaire à (P) avec I$(2;-3;1)$ milieu de [CE] qui vérifie l'équation de (P), alors C et E sont symétriques par rapport à (P).	1,5
2d	La droite (Δ) passe par A et E ; donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE}$. x = –3k + 6, y = – 7k +3, z = k + 2.	0,5

Q_2	Réponses	Note
1a	P{2R,1V}= $\dfrac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^3} = \dfrac{18}{35}$.	1
1b	P{2R,1V}+P{3R}=$\dfrac{18}{35} + \dfrac{C_4^3}{C_7^3} = \dfrac{22}{35}$.	1
2a	P(X= 9) = P(3R) = $\dfrac{4}{35}$. P(X=6) = P{2R,1V)}= $\dfrac{18}{35}$. P(X = 4) = P{1R,2V} = $\dfrac{C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \dfrac{12}{35}$. P(X= 0) = P(3V) = $\dfrac{C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{1}{35}$.	1
2b	P(Score multiple de 3/ Score > 2) =$\dfrac{22}{35} \div \dfrac{34}{35} = \dfrac{11}{17}$.	1

Q_3	Réponses	Note
A1	$\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(-1+i\right)}{2\left(1+i\right)} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.	1
A2	$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -2\left(1+\sqrt{3}\right) + 2\left(1+\sqrt{3}\right) = 0$. OU $\dfrac{z_B}{z_A}$ est imaginaire pur donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(OB) \perp (OA)$.	0,5
B1	$z' = 1 + i - \dfrac{2}{x+iy} = 1 + i - \dfrac{2x-2iy}{x^2+y^2}$. $\mathrm{Re}\left(z'\right) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}\left(z'\right) = 1 + \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.	1
B2	$\mathrm{Re}\left(z'\right) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 = 1$ donc M se déplace sur le cercle de centre (1; 0) et de rayon 1 privé de O.	1,5

Q_4		Note
A.1	$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	0,5
A.2	$g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$. g(x) admet un minimum égal à 1, d'où g(x) > 0 pour x > 0.  	1
B.1	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est asymptote à (C).	0,5
B.2.a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = 0$. Donc la droite ($\Delta$) d'équation y = $\dfrac{x}{2}$ est une asymptote à (C).	0,5
B.2.b	$f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{x}(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$ d'où $y = \dfrac{1}{2e} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{e}; \dfrac{1}{2e}\right)$ est le point de rencontre de (Δ) et (C). Pour x > $\dfrac{1}{e}$, (C) est au-dessus de (Δ),pour 0<x < $\dfrac{1}{e}$ (C) est au-dessous de Δ.	1
B.3	$f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)(x) - \ln x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.  	1
B.4	$f'(x_B) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 1$ donc $B\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.	0,5
B.5	f est continue et elle est strictement croissante de –∞ à +∞ donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α de plus f(0,34) = – 0,061 < 0 et f(0,35) = 0,032 > 0 donc 0,34 < α < 0,35.	1
B.6	 	1
B7a	$H(x) = \int h(x)\,dx = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + \ln x + c$ $= \dfrac{(1+\ln x)^2}{2} + k$.	0,5
B7b	$A = \int_1^e \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right)dx$ $= \int_1^e \dfrac{1+\ln x}{x}\,dx$ $= H(e) - H(1) = \dfrac{3}{2}\ u^2$.	0,5