عدد المسائل اربع	مسابقة في الرياضيات المدة ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة:- يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I - (4 علامات)

تقع النقطة $A\ (6\ ;\ 3\ ;\ 2)$ في الفضاء الاحداثي $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ وكذلك المستوي (P) ذو المعادلة $x-y+2z-7=0$ والمستقيم (d) ذو المعادلات

$$\begin{cases} x=t \\ y=t-3 \\ z=-1 \end{cases}$$
حيث أن t عدد حقيقي.

1- أثبت أن النقطة A توجد في المستوي (P)، كما أن المستقيم (d) موازٍ للمستوي (P).

2- أ - تحقق من أن النقطة $C\ (1\ ;\ -2\ ;\ -1)$ توجد على المستقيم (d).

ب- أكتب نظام معادلات المستقيم (L) المار بالنقطة C والمتعامد مع المستوي (P).

ج- برهن أن النقطة $E\ (3;-4;3)$ هي تناظر النقطة C بالنسبة للمستوي (P).

د- استنتج نظام معادلات المستقيم (Δ) تناظر المستقيم (AC) بالنسبة للمستوي (P).

II- (4 علامات)

يحتوي صندوق على سبع طابات: أربع طابات حمراء وثلا ث طابات خضراء.

اختار لاعب ثلاث طابات من الصندوق عشوائياً ودفعة واحدة.

1- أ- أحسب احتمال ان يسحب اللاعب طابتين حمراوين بالضبط.

ب- بيِّن أن احتمال ان يسحب اللاعب طابتين حمراوين على الاقل يساوي $\frac{22}{35}$.

2- بعد سحب ثلاث طابات،يسجل اللاعب:

- 9 نقاط اذا سحب ثلاث طابات حمراء؛
- 6 نقاط اذا سحب طابتين حمراوين بالضبط ؛
- 4 نقاط اذا سحب طابة حمراء واحدة بالضبط ؛
- صفر من النقاط اذا سحب ثلاث طابات خضراء.

المتغيرة العشوائية (الاتفاقية) X تساوي عدد النقاط التي يسجلها اللاعب.

أ- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغيرة X.

ب- علماً ان اللاعب سجل اكثر من نقطتين، ما احتمال ان يكون ما سجله عدداً مضاعفاً للعدد 3 ؟

III - (4 علامات)

في هذه المسألة، تقع جميع النقاط في المستوي الاحداثي المركب $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ- لتكن A وB نقطتان في هذا المستوي ذات العددين المركبين $z_A = 2+2i$ و $z_B = (1+\sqrt{3})(-1+i)$.

1- حدد الصورة القطبية للعدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$.

2- برهن ان المثلث OAB قائم الزاوية في النقطة O .

ب- لكل نقطة M ذات العدد المركب z ($z \neq 0$) ، نشكل النقطة M' ذات العدد المركب z' حيث ان $z' = 1+i-\frac{2}{z}$.

لنفترض ان $z = x + iy$ حيث ان x وَ y عددان حقيقيان.

1- اكتب الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب z' بدلالة x وَ y.

2- عندما يكون الجزء الحقيقي للعدد z' يساوي صفراً، برهن ان النقطة M تتحرك على دائرة نحدد مركزها ونصف قطرها.

IV- (8 علامات)

أ- لتكن g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1- حدد النهايات $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- انشىء جدول التغير للدالة g واستنتج ان $g(x) > 0$.

ب- لتكن f هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$.

وليكن (C) بيان هذه الدالة في المستوي الاحداثي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- حدد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج محاذياً للبيان (C).

2 - أ- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبرهن ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ محاذياً للبيان (C).

ب- ناقش حسب قيم x موقع (Δ) بالنسبة للبيان (C).

3- برهن ان $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم انشىء جدول التغير للدالة f .

4- أحسب احداثيات النقطة B على البيان (C) حيث يكون المماس (T) في هذه النقطة موازياً للمستقيم (Δ) .

5- برهن ان المعادلة $f(x) = 0$ لها حلاً وحيداً α ثم تأكد أن $0.34 < \alpha < 0.35$.

6- أرسم(Δ) و(T) و(C) .

7- أ- أحسب التكامل $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$.

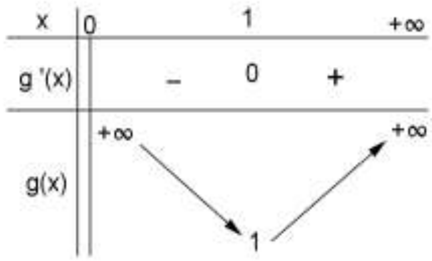
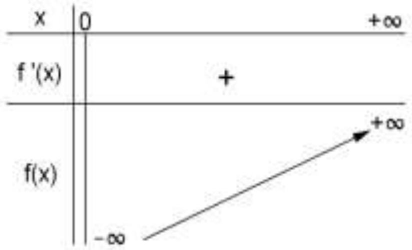
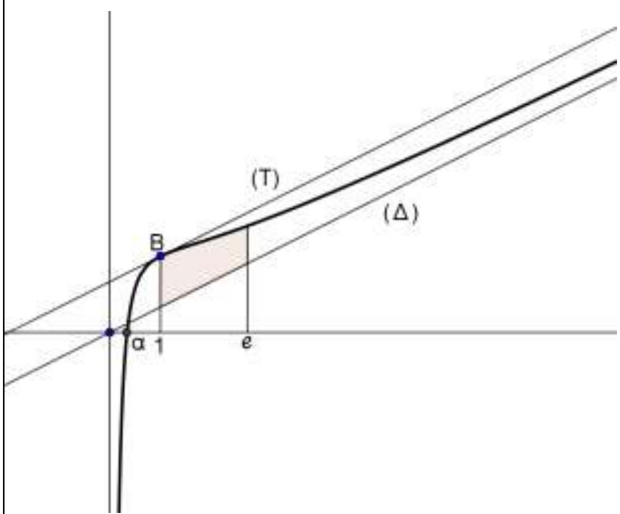
ب- استنتج مساحة المنطقة المحددة بالبيان (C)والمستقيم (Δ) مع المستقيمين $x = 1$ وَ $x = e$.

Barème S.V Fr Session 2 2013

Q1	Réponses	N
1	$x_A - y_A + 2z_A - 7 = 0$ donc $A \in (P)$. et t –t+3 –2 –7=–6 $\neq 0$. Donc (d) est parallèle à (P).	1
2a	Pour : $x = x_C = 1$, t = 1 et $y = y_C = -2$, et z = $z_C = -1$; donc C $\in$ (d).	0,5
2b	$\overrightarrow{v_L}$ est parallèle à $\overrightarrow{n_P}(1;-1;2)$ et (L) passe par C, donc un système d'équations paramétriques de (L) est : x = m +1, y = – m– 2, z = 2m –1 où m est un paramètre réel.	0,5
2c	(L) coupe (P) au point I (m +1, – m –2, 2m –1), et I $\in$ (P), donc m = 1et I $(2;-3;1)$. D'autre part, le point I est le milieu de [EC], donc : $x_E = 2x_I - x_C = 3$, $y_E = 2y_I - y_C = -4$ et $z_E = 2z_I - z_C = 3$. **OU :** $\overrightarrow{CE}(2;-2;4)$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{n_P}$, (CE) est donc perpendiculaire à (P) avec I$(2;-3;1)$ milieu de [CE] qui vérifie l'équation de (P), alors C et E sont symétriques par rapport à (P).	1,5
2d	La droite (Δ) passe par A et E ; donc $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE}$. x = –3k + 6, y = – 7k +3, z = k + 2.	0,5

Q_2	Réponses	Note
1a	P{2R,1V}= $\frac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$.	1
1b	P{2R,1V}+P{3R}=$\frac{18}{35} + \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{22}{35}$.	1
2a	P(X= 9) = P(3R) = $\frac{4}{35}$. P(X=6) = P{2R,1V)}= $\frac{18}{35}$. P(X = 4) = P{1R,2V} = $\frac{C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$. P(X= 0) = P(3V) = $\frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}$.	1
2b	P(Score multiple de 3/ Score > 2) = $\frac{22}{35} \div \frac{34}{35} = \frac{11}{17}$.	1

Q_3	Réponses	Note
A1	$\frac{z_B}{z_A} = \frac{(1+\sqrt{3})(-1+i)}{2(1+i)} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}i = \frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.	1
A2	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2(1+\sqrt{3}) + 2(1+\sqrt{3}) = 0$. OU $\frac{z_B}{z_A}$ est imaginaire pur donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$ et $(OB) \perp (OA)$.	0,5
B1	$z' = 1 + i - \frac{2}{x+iy} = 1 + i - \frac{2x - 2iy}{x^2+y^2}$. $\mathrm{Re}(z') = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\mathrm{Im}(z') = 1 + \frac{2y}{x^2+y^2}$.	1
B2	$\mathrm{Re}(z') = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ donc M se déplace sur le cercle de centre (1; 0) et de rayon 1 privé de O.	1,5

Q4		Note
A.1	$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	0,5
A.2	$g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$. g(x) admet un minimum égal à 1, d'où g(x) > 0 pour x > 0.  	1
B.1	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est asymptote à (C).	0,5
B.2.a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = 0$. Donc la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est une asymptote à (C).	0,5
B.2.b	$f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{x}(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$ d'où $y = \dfrac{1}{2e} \Rightarrow A\left(\dfrac{1}{e}; \dfrac{1}{2e}\right)$ est le point de rencontre de (Δ) et (C). Pour $x > \dfrac{1}{e}$, (C) est au-dessus de (Δ),pour $0<x<\dfrac{1}{e}$ (C) est au-dessous de Δ.	1
B.3	$f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)(x) - \ln x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.  	1
B.4	$f'(x_B) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 1$ donc $B\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.	0,5
B.5	f est continue et elle est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α de plus f(0,34) = – 0,061 < 0 et f(0,35) = 0,032 > 0 donc $0,34 < \alpha < 0,35$.	1
B.6	 	1
B7a	$H(x) = \int h(x)\,dx = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + \ln x + c$ $= \dfrac{(1+\ln x)^2}{2} + k$.	0,5
B7b	$A = \displaystyle\int_1^e \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right) dx$ $= \displaystyle\int_1^e \dfrac{1+\ln x}{x}\,dx$ $= H(e) - H(1) = \dfrac{3}{2}\ u^2$.	0,5