| وزارة التربية والتعليم العالي<br>المديرية العامة للتربية<br>دائرة الامتحانات | الشهادة الثانوية العامة<br>فرع: علوم الحياة | دورة العام ٢٠١٥ الاستثنائيّة<br>السبت ٢٢ آب ٢٠١٥ |
|---|---|---|
| عدد المسائل : اربع | مسابقة في مادة الرياضيات<br>المدة: ساعتان | الاسم:<br>الرقم: |


ملاحظة : - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

**I-(4 points)**

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan (P) d'équation $x-2y+2z-6=0$ et

la droite (d) d'équations paramétriques $\begin{cases} x = m+1 \\ y = 2m+1 \\ z = 2m+2 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$.

Soit (Q) le plan contenant (d) et perpendiculaire à (P) et A (1 ; 1 ; 2) un point de (d).

1) Montrer que $2x-z=0$ est une équation du plan (Q).

2) Démontrer que la droite $(\Delta)$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5t-3 \\ z = 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

est la droite d'intersection de (P) et (Q).

3) a- Déterminer les coordonnées du point B intersection de (d) et $(\Delta)$.
b- Déterminer les coordonnées du point F projeté orthogonal de A sur $(\Delta)$.
c- Calculer le cosinus de l'angle formé par (d) et (P).

**II-(4 points)**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, M et M´ d'affixes respectives $-2$ ; $i$ ; $z$ et $z'$ tels que $z' = \dfrac{z+2}{z-i}$ où $z \neq -2$ et $z \neq i$.

1) Dans cette question seulement, on suppose que $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
a- Ecrire le nombre complexe $-1-i$ sous forme exponentielle.
b- Déduire que $(z')^{40}$ est un réel.

2) On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ avec x, y, $x'$ et $y'$ sont des nombres réels.
a- Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de x et de y.
b- Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ en fonction de x et y.
c- Déduire que si $z'$ est imaginaire pur alors les deux droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.

3) a- Vérifier que $(z'-1)(z-i) = 2+i$.
b- Déduire que si M se déplace sur le cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ alors $M'$ varie sur un cercle $(C')$ dont on déterminera le centre et le rayon.

**III-(4 points)**

Une urne contient 4 boules rouges et 3 boules noires.

A- Dans cette partie, on tire de cette urne, successivement et au hasard, trois boules de la façon suivante : On tire la première boule sans la remettre dans l'urne, puis on tire la deuxième boule et on la remet dans l'urne, finalement on tire la troisième boule.

1) Vérifier que la probabilité de tirer trois boules noires est égale à $\frac{1}{21}$ .
2) Calculer la probabilité que la première boule tirée soit noire et les deux autres soient rouges.
3) Sachant que la première boule tirée est noire, calculer la probabilité que les deux autres boules tirées soient rouges.

B- Dans cette partie, les quatre boules rouges seront numérotées : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et les trois boules noires : 1 ; 2 ; 3.
On tire **simultanément** et au hasard trois boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité que deux boules parmi les trois boules tirées portent le même numéro.
2) Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées portant le numéro 2. Déterminer la loi de probabilité de X.

**IV-(8 points)**

A- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.
2) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de $g$.
3) Calculer $g(1)$ puis déduire, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

B- On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit (d) la droite d'équation $y = x$ .

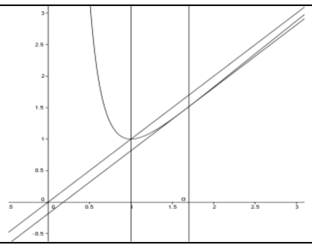
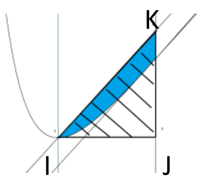
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
2) a- Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).
   b- Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) est une asymptote à (C).
3) a-Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ et dresser le tableau de variations de f.
   b- Déterminer le point E de (C) où la tangente $(\Delta)$ à (C) est parallèle à la droite (d).
   c- Tracer (d), $(\Delta)$ et (C).
4) Soit $\alpha$ un réel supérieur à 1. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
   a- Vérifier que $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{-1-\ln x}{x} + k$ où k est un nombre réel.
   b- Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.
   c- A l'aide du graphique, démontrer que $A(\alpha) < \frac{(\alpha-1)^2}{2}$.

**Barème SV 2015 2ème session Fr**

| Q.I | Réponses | N |
|---|---|---|
| 1 | 2(m + 1) – (2 m+2) = 0, $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N_P}=2-2=0$ donc 2x – z = 0 est une équation de (Q).<br>**<u>OU</u>**: $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{V_d}\wedge\overrightarrow{N_P}\right)=0\Leftrightarrow 2x-z=0.$ | 1 |
| 2 | 2t – 2t = 0 ; t –5t + 6 + 4t – 6 = 0 donc $(\Delta)$ vérifie les équations des deux plans.<br>**<u>OU</u>** : on résout le système $\begin{cases}2x-z=0\\ x-2y+2z-6=0\end{cases}$ en prenant x = t. | 0,5 |
| 3.a | B est le point d'intersection de (d) et (P) :<br>m + 1 –4m –2 +4m + 4 – 6 = 0 $\rightarrow$ m = 3 et par suite B (4 ; 7 ; 8).<br>**<u>OU</u>** : on résout le système $\begin{cases}m+1=2t\\ 2m+1=5t-3\\ 2m+2=4t\end{cases}$ | 1 |
| 3.b | Si F est le projeté orthogonal de A sur $(\Delta)$ alors $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{V_\Delta}=0$ ; $\overrightarrow{V_\Delta}(2;5;4)$ et<br>$\overrightarrow{AF}(2t-1;5t-4;4t-2)$ ; $4t-2+25t-20+16t-8=0$ donc $t=\frac{2}{3}\rightarrow F\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ . | 1 |
| 3.c | Si α est une mesure de l'angle de (d) et (P) alors $\cos\alpha=\frac{BF}{AB}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$. | 0,5 |

| Q.II | Réponses | N |
|---|---|---|
| 1.a | $-1-i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$ | 0.5 |
| 1.b | $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i.$ $z'=\frac{-1+i+2}{-1+i-i}=-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.<br>$(z')^{40}=2^{20}e^{50\pi i}=2^{20}e^{0\pi i}=2^{20}$ donc $(z')^{40}$ est un réel | 0.5 |
| 2.a | $z'=\frac{z+2}{z-i}=\frac{x+2+iy}{x+i(y-1)}\times\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}=\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$.<br>donc $x'=\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $y'=\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$ . | 1 |
| 2.b | $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=x^2+y^2+2x-y$ . | 0.5 |
| 2.c | $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=x^2+y^2+2x-y$ .<br>Si $z'$ est imaginaire pur c.à.d. $\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}=0$ ; $x^2+y^2+2x-y=0$ ; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$<br>Donc (AM) et (BM) sont perpendiculaires. | 0.5 |
| 3.a | $(z'-1)(z-i)=\left(\frac{z+2}{z-i}-1\right)(z-i)=\frac{2+i}{z-i}(z-i)=2+i.$ | 0.5 |
| 3.b | si M se déplace sur le cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ alors $\lvert z-i\rvert=\sqrt{5}$ ;<br>$\lvert z'-1\rvert\lvert z-i\rvert=\lvert 2+i\rvert=\sqrt{5}$ ; $\lvert z'-1\rvert=\frac{\sqrt{5}}{\lvert z-i\rvert}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$ donc M′ décrit le cercle de centre H<br>d'affixe 1 et de rayon 1. | 0.5 |

| Q.III | | Réponses | | | N |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | P (N, N, N) = $\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{21}$. | 0.5 2 | P (N, R, R) = $\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{21}$. | 0.5 |
| | 3 | P (deux autres boules tirées soient rouges / la première boule tirée est noire) = $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$. | | | 0.5 |
| B | 1 | P(deux boules de même numéro) = P{1,1,x}+P(2,2,x}+P{3,3,x}= $3\times\frac{C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$. | | | 1 |
| | 2 | $X=\{0;1;2\}$ $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$ ; $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_5^2}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$ ; $P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$ | | | 1.5 |

| Q.IV | | Réponses | N |
|---|---|---|---|
| A | 1 | $\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^3-1+2\ln x\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-1+2\ln x\right)=+\infty$. | 0,5 |
| | 2 | $g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}>0$. $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline g'(x) & \| & + & \\ \hline g(x) & \| -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 0,5 |
| | 3 | Comme g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et g(1) = 0 alors:<br>si $0<x\le1$ alors $g(x)\le g(1)$ et $g(x)\le0$.<br>si $x>1$ alors $g(x)>g(1)$ et $g(x)>0$. | 0,5 |
| B | 1 | $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation x = 0 est une asymptote à (C). | 0,5 |
| | 2.a | $f(x)-y=-\frac{\ln x}{x^2}$ . (C) et (d) se coupent au point (1 ; 1).<br>Pour $0<x<1$, $f(x)-y>0$ ; (C) est au-dessus de (d) ;<br>pour $x>1$ ; $f(x)-y<0$, (C) est en dessous de (d). | 0,5 |
| | 2.b | $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{\ln x}{x^2})=0$; $y=x$ asymptote à (C) | ¾ |
| | 3.a | $f'(x)=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}$<br>$=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$. $\begin{array}{c\|\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \|\| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & \|\| +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & +\infty \end{array}$ | 1 |
| | 3.b | $f'(x)=1; g(x)=x^3$ ; $-1+2\ln x=0$ ; $x=e^{\frac{1}{2}}$ ; $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2e}$. $E\left(e^{\frac{1}{2}};e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2e}\right)$. | ¾ |
| | 3.c |  | 1 |
| | 1 4.a | $u=\ln x$ et $v'=\frac{1}{x^2}$ ; $u'=\frac{1}{x}$ et $v=-\frac{1}{x}$.<br>$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}+k=\frac{-1-\ln x}{x}+k$ | |
| | 4.b | $A(\alpha)=\int_1^\alpha[x-f(x)]dx=\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\alpha-\left[\frac{1}{x}\right]_1^\alpha=(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{\ln\alpha}{\alpha})$ $u^2$. | 0,5 |
| | 4.c |  $A(\alpha)<\int_1^\alpha(x-1)dx$ ; $A(\alpha)<\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+\frac{1}{2}$ ; $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$ car la partie coloriée est à l'intérieur du triangle rectangle isocèle IJK<br>**OU** $A(\alpha)<$ Aire du triangle IJK; $A(\alpha)<\frac{IJ\times JK}{2}$; $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$. | 0,5 |