وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	الشهادة الثانوية العامة فرع: علوم الحياة	دورة العام ٢٠١٥ الاستثنائيّة السبت ٢٢ آب ٢٠١٥
عدد المسائل : اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة : - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 علامات)

في الفضاء الإحداثي العائد للنظام $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، يوجد المستوي (P) ذو المعادلة $x-2y+2z-6=0$ والمستقيم (d) ذو المعادلات $\begin{cases} x = m+1 \\ y = 2m+1 \\ z = 2m+2 \end{cases}$، حيث أن m متغيّر حقيقي $(m \in \mathbb{R})$.

لتكن A (1; 1; 2) نقطة على (d). وليكن (Q) هو المستوي الذي يحتوي (d) والمتعامد مع (P).

1) بيّن أنّ $2x-z=0$ هي معادلة المستوي (Q).

٢) برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلات $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5t-3 \\ z = 4t \end{cases}$ حيث t متغيّر حقيقي $(t \in \mathbb{R})$،

هو خط التقاطع بين المستويين (P) وَ (Q).

3) a- جِد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيمين (d) وَ (Δ).

b- جِد إحداثيات النقطة F ، الإسقاط العامودي للنقطة A على المستقيم (Δ).

c- احسب جيب التمام للزاوية بين المستقيم (d) وَ المستوي (P).

II - (4 علامات)

في المستوي المركّب العائد للنظام $(O;\vec{u},\vec{v})$، توجد النقاط A ،B ،M وَ M´ التي أعدادها المركّبة هي على التوالي:

-2 ؛ i ؛ z ؛ z' علماً أن $z'=\dfrac{z+2}{z-i}$ وَ $z \neq -2$ وَ $z \neq i$.

1) لنفترض في هذا السؤال فقط أن $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$،

a- جِد الصورة القطبية للعد المركّب $-1-i$

b- استنتج أن $(z')^{40}$ هو عدد حقيقي.

2) ليكن $z = x + i\,y$ وَ $z' = x' + i\,y'$ حيث x ، y ، x' و y' أعداد حقيقية.

a- جِد x' وَ y' بدلالة x وَ y.

b- احسب $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ بدلالة x وَ y .

c- استنتج أنّه، إذا كان z′ هو عدد تخيّلي، فإن المستقيمين (AM) وَ (BM) متعامدان.

3) a- تحقّق أن $(z'-1)(z-i) = 2+i$.

b- استنتج أنه، إذا تحرّكت النقطة M على الدائرة (C) ذات المركز B ونصف القطر $\sqrt{5}$، فإن النقطة M´ تتحرّك على دائرة (C') يجب تحديد مركزها ونصف قطرها.

III - (4 علامات)

يحتوي كيس على 4 طابات حمراء و 3 طابات سوداء.

A- في هذا القسم، تم سحب ثلاث طابات عشوائياً واحدة بعد الأخرى من الكيس كما يلي:
سُحبت الطابة الأولى وأُبقيت خارج الكيس، ثم سُحبت الطابة الثانية وأُعيدت الى الكيس وأخيراً سُحبت الطابة الثالثة.

1) تحقّق أن احتمال سحب ثلاث طابات سوداء يساوي $\frac{1}{21}$.
2) أحسب احتمال أن تكون الطابة الأولى المسحوبة سوداء وأن تكون الطابتين الأخريين حمراوين.
3) علماً أن الطابة الاولى المسحوبة سوداء، أحسب احتمال أن تكون الطابتين الأخريين حمراوين.

B- لنفترض في هذا القسم أن الطابات الحمراء تحمل الارقام: 1، 2، 3، 4 وأن الطابات السوداء تحمل الأرقام: 1، 2، 3 .
نختار عشوائياً دفعة واحدة ثلاث طابات من الكيس.

1) أحسب احتمال أن تحمل طابتان من الطابات الثلاث المسحوبة نفس الرقم.
2) لتكن X المتغيّرة العشوائية التي تساوي عدد الطابات ذات الرقم 2. حدِّد التوزيع الاحتمالي للمتغيّر X.

IV - (8 علامات)

A- لتكن g هي الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^3-1+2\ln x$

1) حدّد $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2) احسب $g'(x)$ ، ثم انشئ جدول التغيّر للدالّة g.
3) احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم المتغيّر x.

B- لتكن الدالّة f معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$ وليكن (C) بيان هذه الدالّة في المستوي الإحداثي $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
ليكن (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

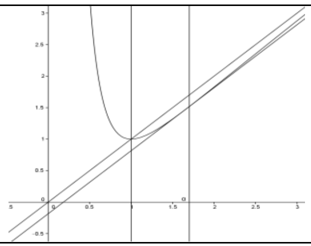
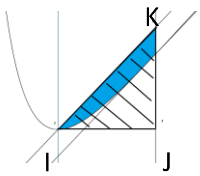
1) حدّد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة مقارب للبيان (C).
2) a- ادرس حسب قيَم x، موقع البيان (C) بالنسبة للمستقيم (d).
   b- حدّد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بيّن أن المستقيم (d) هو مقارب للبيان (C).
3) a- تحقّق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ وانشئ جدول التغيّر للدالة f.
   b- حدّد النقطة E على البيان (C) حيث يكون المماس (Δ) للبيان (C) موازياً للمستقيم (d).
   c- أرسم (d) وَ (Δ) وَ (C).
4) ليكن α عدداً حقيقياً أكبر من 1 ، ولتكن $A(\alpha)$ مساحة المنطقة المحدّدة بالبيان (C)، المستقيم (d) والمستقيمين ذي المعادلتين: $x=1$ وَ $x=\alpha$.
   a- تحقّق أن $\int \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{-1-\ln x}{x}+k$ حيث أن k عدد حقيقي.
   b- جِد $A(\alpha)$ بدلالة α.
   c- استعمل الرسم البياني كي تبرهن أن $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$.

Barème SV 2015 2nd session An

Q.I	Answers	N
1	$2(m+1)-(2m+2)=0$, $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N_P}=2-2=0$ hence $2x-z=0$ is an equation of (Q). **OR**: $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{V_d}\wedge\overrightarrow{N_P}\right)=0\Leftrightarrow 2x-z=0$.	1
2	$2t-2t=0$; $t-5t+6+4t-6=0$ hence (Δ) verifies the equations of the two planes. **OR**: we solve the system $\begin{cases}2x-z=0\\x-2y+2z-6=0\end{cases}$ taking $x=t$.	0,5
3.a	B is the point of intersection of (d) and (P): $m+1-4m-2+4m+4-6=0\rightarrow m=3$. B (4 ; 7 ; 8). **OR**: we solve the system $\begin{cases}m+1=2t\\2m+1=5t-3\\2m+2=4t\end{cases}$	1
3.b	If F is the orthogonal projection of A on (Δ) then $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{V_\Delta}=0$.; $\overrightarrow{V_\Delta}(2;5;4)$ and $\overrightarrow{AF}(2t-1;5t-4;4t-2)$; $4t-2+25t-20+16t-8=0$ then $t=\frac{2}{3}\rightarrow F\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.	1
3.c	If α is a measure of the angle of (d) and (P) then $\cos\alpha=\frac{BF}{AB}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.	0,5

Q.II	Answers	N
1.a	$-1-i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$	0.5
1.b	$z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i.$ $z'=\frac{-1+i+2}{-1+i-i}=-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. $(z')^{40}=2^{20}e^{50\pi i}=2^{20}e^{0\pi i}=2^{20}$ then $(z')^{40}$ is a real number	0.5
2.a	$z'=\frac{z+2}{z-i}=\frac{x+2+iy}{x+i(y-1)}\times\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}=\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$. then $x'=\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $y'=\frac{x-2y+2}{x^2+(y-1)^2}$.	1
2.b	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=x^2+y^2+2x-y$.	0.5
2.c	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=x^2+y^2+2x-y$. If z' is pure imaginary so $\frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2}=0$; $x^2+y^2+2x-y=0$; $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ Therefore (AM) and (BM) are perpendicular.	0.5
3.a	$(z'-1)(z-i)=\left(\frac{z+2}{z-i}-1\right)(z-i)=\frac{2+i}{z-i}(z-i)=2+i.$	0.5
3.b	If M moves on the circle with center B and radius $\sqrt{5}$ so $\lvert z-i\rvert=\sqrt{5}$; $\lvert z'-1\rvert\lvert z-i\rvert=\lvert 2+i\rvert=\sqrt{5}$; $\lvert z'-1\rvert=\frac{\sqrt{5}}{\lvert z-i\rvert}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$ therefore M' moves on the circle with center H(1) and radius1.	0.5

Q.III		Answers	N
A	1	$P(N,N,N)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{21}$. — **0.5** ⇨ **2** — $P(N,R,R)=\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{21}$.	**0.5**
	3	P (the two other balls are red / the first ball selected is black) = $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$.	**0.5**
B	1	P(two balls having the same number) = P{1,1,x}+P(2,2,x}+P{3,3,x}= $3\times\frac{C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$.	**1**
	2	$X=\{0;1;2\}$ $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$; $P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_5^2}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$; $P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$	**1.5**

Q.IV		Answers	N
A	1	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ and $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.	**0,5**
	2	$g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}>0$. x: 0 … $+\infty$ $g'(x)$: + $g(x)$: $-\infty$ ↗ $+\infty$	**0,5**
	3	g is strictly increasing on $]0;+\infty[$ and $g(1)=0$ then : if $0<x\le 1$ then $g(x)\le g(1)$ and $g(x)\le 0$. if $x>1$ then $g(x)>g(1)$ and $g(x)>0$.	**0,5**
B	1	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$; the line of equation $x=0$ is an asymptote to (C).	**0,5**
	2.a	$f(x)-y=-\frac{\ln x}{x^2}$. (C) and (d) intersect at the point (1; 1). For $0<x<1$; $f(x)-y>0$; (C) is above (d) ; For $x>1$; $f(x)-y<0$, (C) is below (d).	**0,5**
	2.b	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x^2}=0$; $y=x$ asymptote to (C).	**¾**
	3.a	$f'(x)=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$. x: 0, 1, +oo f ′(x): — 0 + f(x): + oo ↘ 1 ↗ +oo	**1**
	3.b	$f'(x)=1; g(x)=x^3$; $-1+2\ln x=0$; $x=e^{\frac{1}{2}}$; $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2e}$. $E\left(e^{\frac{1}{2}};e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2e}\right)$.	**¾**
	3.c	 — **1** ⇨ **4.a** — $u=\ln x$ and $v'=\frac{1}{x^2}$; $u'=\frac{1}{x}$ and $v=-\frac{1}{x}$. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}+k=\frac{-1-\ln x}{x}+k$	**1**
	4.b	$A(\alpha)=\int_1^\alpha[x-f(x)]dx=\int_1^\alpha\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\alpha-\left[\frac{1}{x}\right]_1^\alpha=(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{\ln\alpha}{\alpha})\ u^2$.	**0,5**
	4.c	 $A(\alpha)<\int_1^\alpha(x-1)dx$; $A(\alpha)<\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+\frac{1}{2}$; $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$ since the colored region is inside the right isosceles triangle IJK **OR** $A(\alpha)<$ Area of the triangle IJK; $A(\alpha)<\frac{IJ\times JK}{2}$; $A(\alpha)<\frac{(\alpha-1)^2}{2}$.	**0,5**