وزارة التربية والتعليم العالي المديرية العامة للتربية دائرة الامتحانات	امتحانات شهادة الثانوية العامة فرع العلوم العامة	دورة العام 2013 الاستثنائية الإثنين 19 آب 2013
عدد المسائل ست	مسابقة في الرياضيات المدة أربع ساعات	الإسم: الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو تخزين المعلومات أو رسم البيانات
يستطيع المرشح الاجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (2 Points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les trois points non alignés A (1 ; 1 ; 1), B (– 2 ; – 5 ; – 2) et I (4 ; – 2 ; 4).
Dans le plan (ABI), on considère le cercle (C) de centre I et de rayon R = $3\sqrt{3}$.

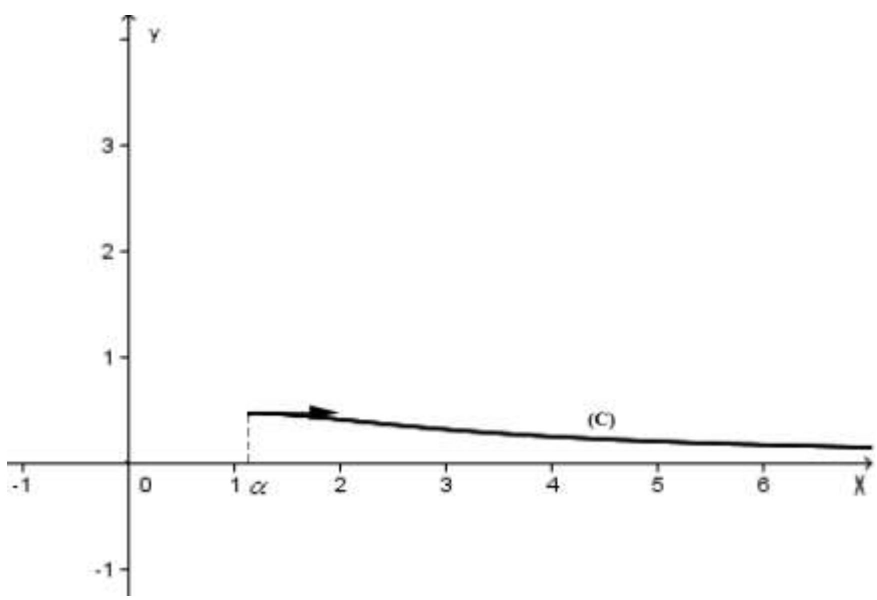
1) Vérifier que A est un point de (C) et que B est à l'extérieur de (C).

2) Montrer que la droite (AB) est tangente à (C).

3) Soit (BT) la deuxième tangente menée de B à (C). (T est sur (C)).
 Calculer l'aire du quadrilatère AITB.

4) Soit (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (BI).
 a- Déterminer une équation de (Q).
 b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (BI).
 c- Soit H le point d'intersection de (Q) et (BI). Calculer les coordonnées de H et déduire les coordonnées du point T.

II- (2 Points)



Soit α un réel supérieur à 1. La courbe (C) ci- dessus, représente la fonction f définie sur

$[\alpha\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. L’axe des abscisses est asymptote à (C).

1) Déterminer une primitive F de f sur $[\alpha\,;+\infty[$.

2) Pour tout entier naturel n> 1, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a- Calculer u_2 et u_3 à 10^{-2} près.

b - Montrer que, pour $n \le x \le n+1$, $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ et déduire que $f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

c - Déduire que la suite (u_n) est décroissante.

d- Déterminer la limite de la suite (u_n).

III - (3 Points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

À tout point M(x ; y) d’affixe $z \neq 0$, on associe le point M´ (x′ ; y′) d’affixe z´ telle que : $z' = z + \dfrac{1}{z}$.

1) Démontrer que $x' = x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ et $y' = y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

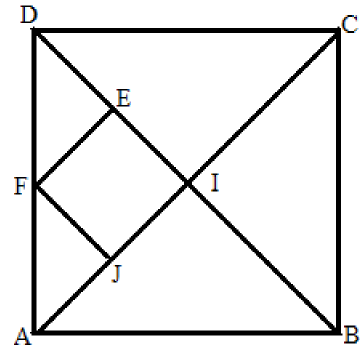
2) On suppose que le point M se déplace sur le cercle d’équation $x^2 + y^2 = 4$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y et démontrer que M' se déplace sur l’ellipse (E) d’équation $36x^2+100y^2=225$.

3) On suppose que le point M se déplace sur la droite d’équation $y = x$, privée de O. Vérifier que le point M´ se déplace sur l’hyperbole (H) d’équation $x^2 - y^2 = 2$.

4) Prouver que l’ellipse (E) et l’hyperbole (H) ont les mêmes foyers.

5) Soit $A\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4};\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ l’un des points communs de (E) et (H). Démontrer que les tangentes à (E) et (H) en A sont perpendiculaires.

IV- (3 Points)



ABCD est un carré direct de centre I.
On désigne par E, F et J les milieux respectifs des segments [ID], [DA] et [AI].
Soit S la similitude de rapport k et d'angle α , qui transforme A en J et B en I.

1) Calculer k et déterminer une mesure de α .

2) Démontrer que E est l'image de C par S. Déterminer S (D), S (I) et S (J).

3) a-Trouver la nature, le rapport et une mesure de l'angle de $S \circ S$.

   b- Déterminer SoS (A) et SoS (B) puis construire le point Ω centre de S.

4) On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   Déterminer la forme complexe de S et déduire les coordonnées du point Ω .

V-(3 Points)

On dispose de deux dés dont l'un est parfait et l'autre truqué.
Les faces de chacun d'eux sont numérotées de un à six.
Lorsqu'on lance le dé parfait toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître.
Lors d'un lancer du dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4, est égale à $\frac{1}{3}$ alors que toutes les autres faces ont la même probabilité d'apparaître.

1) On lance le dé truqué une seule fois, démontrer que la probabilité d'obtenir une face ne portant pas le chiffre 4, est égale à $\frac{2}{15}$.

2) On lance le dé parfait deux fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît.
   Déterminer la loi de probabilité de X.

3) On lance le dé truqué deux fois de suite. Montrer que la probabilité d'obtenir exactement une seule fois la face portant le chiffre 4, est égale à $\frac{4}{9}$.

4) On choisit au hasard l'un des deux dés et on le lance deux fois de suite. (Les deux dés ont la même probabilité d'être choisis).
   Calculer la probabilité d'obtenir exactement une face portant le chiffre 4.

VI - (7 Points)

Soit f la fonction définie, sur [0 ; + ∞[par $\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1)^2 & \text{pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On admet que f est continue au point x = 0.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

b- Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2) Vérifier que, pour x > 0, $f'(x) = (\ln x)^2 - 1$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I et écrire une équation de la tangente (T) en I à (C).

4) La droite (Δ) d'équation y = x coupe (C) en O , I et J. Calculer les coordonnées de J.

5) Tracer (T) et (C).

6) a- Montrer que la fonction F définie sur]0 ; +∞[par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - 3\ln x + \dfrac{5}{2}\right]$,

est une primitive de f.

b- Déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), la tangente (T) et l'axe des abscisses.

7) Démontrer que f admet, sur l'intervalle [e ; + ∞[une fonction réciproque f^{-1} et tracer sa courbe représentative dans le même repère que celui de (C).

8) Soit (d_m) la droite d'équation y = m x où m > 0. La droite (d_m) coupe la courbe (C) en trois points distincts O, M et M´.

a- Calculer, en fonction de m, les coordonnées des points M et M´.

b- Soit P le point de (d_m) d'abscisse x = e. Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = OP^2$.

Mathématiques	Barème S.G	Deuxième session 2013

Q_1	Réponses	Note
1	$\overrightarrow{AI}(3;-3;3)$ IA= $3\sqrt{3}$ =R, donc A appartient au cercle. $\overrightarrow{BI}(6;3;6)$ IB = $9 >$ R, donc B est à l'extérieur de (C).	0,5
2	(AB) est dans (ABI). $\overrightarrow{AB}(-3;-6;-3), \overrightarrow{AI}(3;-3;3)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=0$,et(AB) est tangente à (C).	0,5
3	L'aire de AITB = 2× l'aire du triangle AIB = AI× AB = $27\sqrt{2}$ unités d'aire.	0,5
4a	$\vec{n}_Q$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{BI}(6;3;6)$, soit $\vec{n}_Q(2;1;2)$, d'où une équation de (Q) est : 2x + y + 2z + r = 0, et comme $A \in (Q)$, alors r = –5, et (Q) : 2x + y + 2z –5 = 0.	0,5
4b	$\overrightarrow{BI}(6;3;6)$, donc $\vec{v}_{BI}(2;1;2)$ et (BI) passe par I d'où (BI) : $\begin{cases} x = 2m+4 \\ y = m-2 \quad \text{où } m \in \mathbb{R} \\ z = 2m+4 \end{cases}$.	0,5
4c	Le point H appartient à (BI), donc $x_H = 2m+4$, $y_H = m-2$ et $z_H = 2m+4$. D'autre part, $H \in (Q)$ donc $2x_H + y_H + 2z_H - 5 = 0$ d'où $m=-1$;Par suite H (2 ;-3 ;2). T est le symétrique de A par rapport à H, donc H est le milieu de [AT], d'où $T(3;-7;3)$.	1,5

Q_2	Réponses	Note
1	$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{\left(x+e^{-x}\right)'}{\left(x+e^{-x}\right)}dx = \ln\left(x+e^{-x}\right)+c.$	1
2.a	$u_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = F(3)-F(2) = \ln\left(3+e^{-3}\right)-\ln\left(2+e^{-2}\right) \approx 0{,}36.$ $u_3 = \int_3^4 f(x)\,dx = F(4)-F(3) = \ln\left(4+e^{-4}\right)-\ln\left(3+e^{-3}\right) = 1{,}39-1{,}12 = 0{,}27.$	0,5
2.b	f est décroissante ; pour $n \le x \le n+1$, on a $f(n+1) \le f(x) \le f(n) \Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx \Rightarrow$ $f(n+1)\times x\Big]_n^{n+1} \le u_n \le f(n)\times x\Big]_n^{n+1} \Rightarrow f(n+1) \le u_n \le f(n).$	1
2.c	$f(n+2) \le u_{n+1} \le f(n+1)$; donc $u_{n+1} \le f(n+1) \le u_n$, d'où (u_n) est décroissante.	1
2.d	$f(n+1) \le u_n \le f(n)$; or $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$ (courbe (C)). $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$ (théorème des gendarmes)	0,5

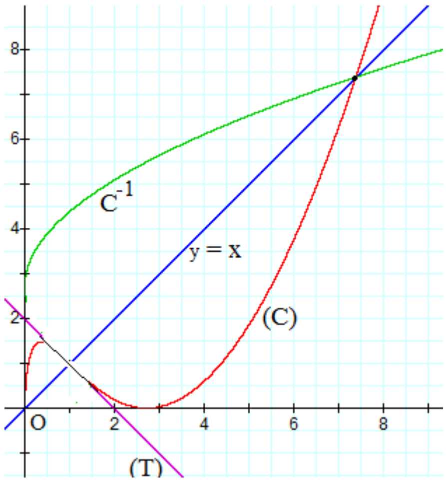
Q_3	Réponses	Note
1	$x'+iy' = x+iy+\frac{1}{x+iy} = x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2} = x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ $x' = x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ et $y' = y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.	1
2	$x' = \frac{5x}{4}$ et $y' = \frac{3y}{4}$ car $x^2+y^2=4$., $36\left(\frac{25x^2}{16}\right)+100\left(\frac{9y^2}{16}\right) = \frac{900}{16}\left(x^2+y^2\right) = \frac{900\times 4}{16} = 225.$ Donc M′ décrit l'ellipse d'équation $36x^2+100y^2=225$.	1,5
3	Si $x=y$ alors $x' = x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)$ et $y' = x\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)$; $x'^2-y'^2 = x^2\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^2 - x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)^2 = 2$, donc $M' \in (H)$.	1,5
4	(E) $\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$. Donc son centre est O et son axe focal est x′Ox, $c^2= a^2-b^2= 4$ et c = 2. (H) est de centre O et d'axe focal x′Ox, $c^2= a^2+b^2= 2+2=4$ et c = 2. D'où (E) et (H) ont les mêmes foyers.	0,5
5	$72x+200yy'=0$ donc $y' = -\frac{9x}{25y}$; $2x-2yy'=0$ donc $y' = \frac{x}{y}$. Produit des pentes $= -\frac{9x^2}{25y^2} = -\frac{9\times 50}{25\times 18} = -1$. Les tangentes sont perpendiculaires.	1,5

Q_4	Réponses	Note
1	$k = \frac{JI}{AB} = \frac{\frac{1}{4}AC}{AB} = \frac{\frac{1}{4}AB\sqrt{2}}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\alpha = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{JI}\right) = \frac{\pi}{4}$.	0,5
2	$\frac{IE}{BC} = \frac{\frac{1}{4}BD}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{IE}\right) = \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$ donc S(C) = E. **OU** Le triangle ABC est rectangle isocèle direct en B. Donc le triangle JIC' doit être rectangle isocèle direct en I. Or JIE l'est en I donc S(C) = E ; ABCD carré direct donc JIED' l'est aussi donc S(D) = F car EF = IJ, FJ = EI = IJ et (IE) est perpendiculaire à (IJ); I étant le centre du carré ABCD donc S(I) =I' est le centre du carré JIEF. J est le milieu de [AI], donc S(J) est le milieu J′ de [JI′].	2
3.a	SoS est une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{8}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.	1

3.b	SoS(A) = S(J) = J′, SoS(B) = S(I) = I′, donc $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega J'}\right)=\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega I'}\right)=\frac{\pi}{2}$ d’où Ω appartient au cercle de diamètre [AJ′] et Ω appartient au cercle de diamètre [BI′]. Ω est l‘un des deux points d’intersection de ces deux cercles et Ω est tel que $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega J}\right)=\frac{\pi}{4}$.	1,5
4	$z_C = 1+i$ et $z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$. S a pour forme complexe z′= az + b avec $a=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i.\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)$, d’où $z'=\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)z+b$. Comme S(B) = I $\Rightarrow z_I=\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)z_B+b\Rightarrow b=\frac{1}{4}+\frac{i}{4}$ et $z'=\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)z+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$. $z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1}{5}+\frac{2i}{5}\Rightarrow\Omega\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.	1

Q_5	Réponses	Note
1	P(4) = $\frac{1}{3}$ et P(1) = P(2) = P(3) = P(5) = P(6) = $\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}$.	1
2.a	X(Ω) = {0;1;2} P(X = 0) = $P\left(\overline{4},\overline{4}\right)=\frac{5}{6}.\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$. P(X = 1) = $P\left(4,\overline{4}\right)+P\left(\overline{4},4\right)=2.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$. P(X = 2) = $P\left(4,4\right)=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.	2
2.b	$P(4)=P\left(4,\overline{4}\right)+P\left(\overline{4},4\right)=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.	1,5
3	$P=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{18}=\frac{13}{36}$.	1,5

Q_6	Réponses	Note
1.a	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x-1\right)^2=+\infty$. En O (0 ; 0), la courbe admet l’axe des ordonnées comme semi tangente.	1
1.b	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-1\right)^2=+\infty$	1

2	$f'(x) = (\ln x - 1)^2 + 2(\ln x - 1) = (\ln x)^2 - 1$. $(\ln x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = e$ ou $x = \frac{1}{e}$. $\begin{array}{c\|ccccccc} x & 0 & & \frac{1}{e} & & e & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & \frac{4}{e} \approx 1,4 & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	2
3	$f''(x) = 2\frac{\ln x}{x}$. Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$, d'où $f''(x) < 0$. Si $x > 1$, alors $\ln x > 0$, d'où $f''(x) > 0$. Par suite $f''(x)$ s'annule pour $x = 1$ en changeant de signe, d'où I (1 ; 1) est un point d'inflexion. Équation de (T) : $y - y_I = y'_I(x - x_I) \Rightarrow$ (T) : $y = -x+2$.	1,5
4	$x(\ln x - 1)^2 = x$; $x = 0$ ou $(\ln x - 1)^2 - 1 = 0$, soit $(\ln x - 2)(\ln x) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \end{cases}$ D'où J $(e^2 ; e^2)$.	1
5	(C) admet, en $+\infty$, une direction asymptotique parallèle à y′oy.  	2
6.a	$F'(x) = x\left[(\ln x)^2 - 3\ln x + \frac{5}{2}\right] + \frac{x^2}{2}\left[2.\frac{1}{x}\ln x - \frac{3}{x}\right] = x\left[(\ln x - 1)^2\right] = f(x)$.	1,5
6.b	$A = \int_1^e f(x)dx - \int_1^2 (-x+2)dx = \left[\frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - 3\ln x + \frac{5}{2}\right]\right]_1^e + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{e^2 - 7}{4}u^2$.	1
7	Sur $[e ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, donc f admet une fonction réciproque g. Courbe (C^{-1}), voir la figure.	1
8.a	$x(\ln x - 1)^2 = mx$, $m > 0$, soit $x[(\ln x - 1)^2 - m] = 0$, $x = 0$ ou $(\ln x - 1)^2 - m = 0$, soit $\left(\ln x - 1 - \sqrt{m}\right)\left(\ln x - 1 + \sqrt{m}\right) = 0 \Rightarrow x = e^{1+\sqrt{m}}$ ou $x = e^{1-\sqrt{m}}$. $x_M = e^{1+\sqrt{m}} \Rightarrow y_M = m.e^{1+\sqrt{m}}$ et $x_{M'} = e^{1-\sqrt{m}} \Rightarrow y_{M'} = m.e^{1-\sqrt{m}}$.	1
8.b	$x_P = e$ et $y_P = m.e$, $OP^2 = {x_P}^2 + {y_P}^2 = e^2(1+m^2)$ $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = e^{1+\sqrt{m}} \times e^{1-\sqrt{m}} + m^2 e^{1+\sqrt{m}} \times e^{1-\sqrt{m}} = e^2 + m^2 e^2 = OP^2$.	1