وزارة التربية والتعليم العالي
المديرية العامة للتربية
دائرة الامتحانات

امتحانات الشهادة الثانوية العامة
فرع: العلوم العامة

دورة العام ٢٠١٥ الاستثنائيّة
الثلاثاء ١٨ آب ٢٠١٥

عدد المسائل: ست	مسابقة في مادة الرياضيات المدة أربع ساعات	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (2 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Écrire le numéro de chaque question et donner en justifiant la réponse qui lui correspond.

№	Questions	Réponses a	Réponses b	Réponses c	Réponses d
1	La solution particulière f(x) de l'équation différentielle y '' + 4y = 0 telle que f (0) = 0 et f ' (π) = –1 est :	$\frac{1}{2}\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$	sin 2x – cos2x
2	Pour x >1, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x-1} =$	$+\infty$	1	e	2e
3	Si f est une fonction impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 2$, alors $\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx =$	– 2	0	2	– 4
4	Soit M d'affixe z $(z \neq 1)$ un point variable du plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct. Si $\frac{z+1}{z-1}$ est un réel alors M se déplace sur :	le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe 1	l'axe des abscisses privé du point d'affixe 1	la droite d'équation y = x	l'axe des ordonnées

II- (2 points)

Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points E (– 1 ; 1 ; 0), F (– 2 ; – 1 ; 0) et la droite (d) d’équations paramétriques $x = t - 1$, $y = 2t + 1$, $z = -2t$ où t est un paramètre réel. (P) est le plan déterminé par le point F et la droite (d).

1) Vérifier que E est un point de (d).
2) Montrer que $2x - y + 3 = 0$ est une équation de (P).
3) (C) est le cercle du plan (P) de centre F et de rayon FE.
   a- Trouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal de F sur (d).
   b- Trouver les coordonnées de L, le second point d’intersection de (d) et (C).
   c- Ecrire un système d’équations paramétriques de la bissectrice de l’angle EFL .
4) Soit (Q) le plan contenant (d) et perpendiculaire à (P). Soit (Δ) la médiatrice du segment [EL] contenue dans (Q).
   Ecrire un système d’équations paramétriques de la droite (Δ).

III- (3 points)

Une urne contient 5 boules blanches et 2 boules noires.
Un jeu consiste à effectuer, au hasard, deux tirages successifs.

- Au premier tirage, on tire une boule. Si elle est blanche, on la remet dans l’urne sinon on la laisse en dehors de l’urne.
- Au second tirage, on tire simultanément deux boules de l’urne.

On considère les événements suivants :

- B : « la boule tirée au premier tirage est blanche » ;
- E : « les deux boules tirées au second tirage sont blanches » ;
- F : « les deux boules tirées au second tirage sont noires » ;
- G : « les deux boules tirées au second tirage sont de couleurs différentes ».

1) Calculer les probabilités $P\left(E/B\right)$ et $P\left(E/\overline{B}\right)$. Déduire que $P(E) = \frac{26}{49}$.
2) Calculer $P(F)$ et $P(G)$.
3) Sachant que les deux boules tirées au second tirage ont la même couleur, calculer la probabilité que la boule tirée au premier tirage soit noire.
4) Dans cette question, on marque -3 points pour chaque boule noire tirée et $+5$ points pour chaque boule blanche tirée.
   On note **S** la somme des points marqués pour les deux boules obtenues au second tirage.
   Calculer la probabilité que **S** soit positive.

IV- (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j})$.
(C) est le cercle de centre $I(0;\ 3)$ et de rayon 2, (d) est la droite d'équation $y = -3$,
$L(\alpha\ ;\ \beta)$ est un point variable sur (C), N est le projeté orthogonal de L sur (d) et M est le milieu du segment [LN].

1) Ecrire une équation de (C).
2) a- Déterminer les coordonnées de M en fonction de α et β.

   b- Lorsque L se déplace sur (C), démontrer que M se déplace sur l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

   c- Tracer (E).

3) (P) est la parabole de sommet S (0 ; 1) et de foyer $F\left(0;\frac{3}{4}\right)$.

   a- Montrer que $y=1-x^2$ est une équation de (P).
   b- Tracer (P) dans le même repère que (E).

4) a- Calculer $\int_0^1 \left(1-x^2\right)dx$.

   b- Déduire l'aire du domaine situé au-dessus de l'axe des abscisses et limité par (E) et (P).
5) Soit G (– 1 ; 0) un point de (P) et (Δ) la tangente en G à (P).
   H est le point de (P) où la tangente à (P) est perpendiculaire à (Δ).
   Démontrer que G, H et F sont alignés.

V- (3 points)

ODA est un triangle équilatéral direct de côté 1.

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $B=R(A)$, $D'=R(D)$ et C le point tel que $D=R(C)$.

1) a- Faire une figure.
   b- Montrer que O est le milieu de $[CD']$ et que $BC=\sqrt{3}$.

2) a- Justifier que (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que AC = BD.
   b- Prouver que (AD) est parallèle à (BC).

3) Soit E le point d'intersection des droites (AC) et (BD) ; on définit l'homothétie h de centre E qui transforme A en C.
   a- Déterminer h (D).
   b- Calculer le rapport de h.

4) Soit L le milieu de [AD] et F = h (L).
   Montrer que les points O, E, F et L sont alignés.

5) R' est la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Soit $S=h\circ R'$.

   a- Déterminer la nature de S et donner ses éléments caractéristiques.

   b- Montrer que S (A) = B.

VI- (7 points)

A- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x - 1$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a-Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

b-Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote à (C).

2) a- Calculer $h'(x)$ et dresser le tableau de variations de h.

b- Tracer (d) et (C).

c- Déduire que : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.

B- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

On désigne par (C') sa courbe représentative dans un autre repère orthonormé.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les asymptotes à (C').
3) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

4) a- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C') en son point E d'abscisse 0.

b- Vérifier que $f(x) - x - 1 = \dfrac{x(x+1-e^x)}{e^x - x}$.

c- Etudier, suivant les valeurs de x, la position de (C') par rapport à (T).

d- Tracer (T) et (C').

C- On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par: $u_n = \int_0^n f(x)\,dx$.

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) a- Vérifier que, pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) \geq 1$

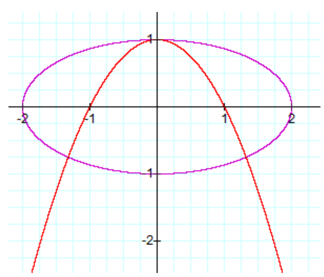
b- La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

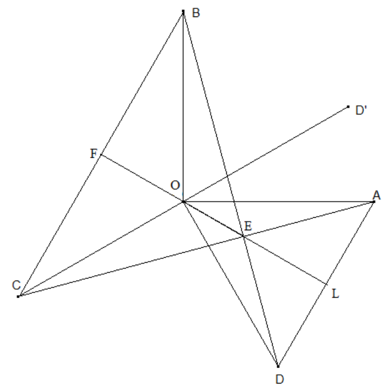
Barème Math SG – Deuxième Session - 2015

QI	Réponses	N
1	y= Acos2x+Bsin2x. f (0) = 0 donc A= 0. f´(x)= –2Asin2x+2Bcos2x. f '(π)= –1 donc $B = -\frac{1}{2}$. b)	1
2	$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x e^{t^2}dt}{x-1} = \frac{0}{0}$ (Indéterminée). R.H. $\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x e^{t^2}dt}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{e^{x^2}}{1} = e.$ c)	1
3	$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = -2.$ a)	1
4	$\frac{z+1}{z-1}$ réel donc $\frac{z+1}{z-1} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}$ ce qui donne $z.\bar{z} - z + \bar{z} - 1 = z.\bar{z} + z - \bar{z} - 1$ et $z = \bar{z}$. Donc, M se déplace sur l'axe des abscisses privé du point d'abscisse 1. b)	1

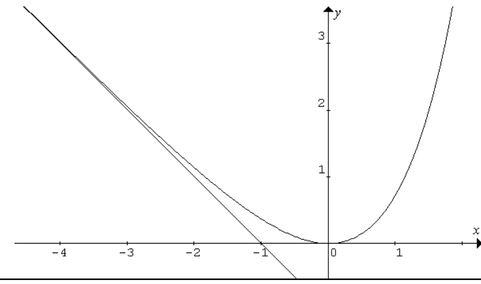
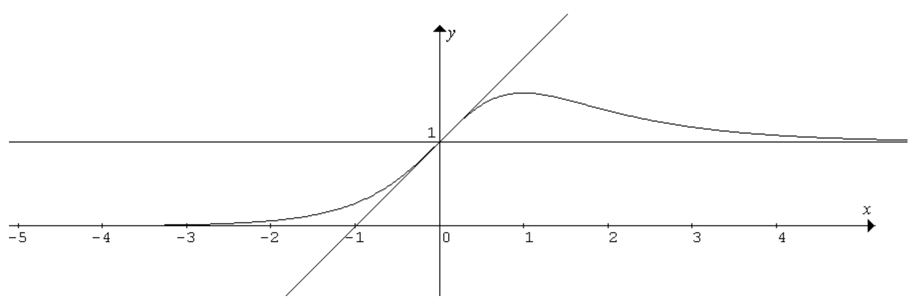
QII	Réponses	N
1	Pour t = 0 E est un point de (d).	0,5
2	2(t – 1) – (2t + 1) + 3 = 0 – 4+ 1+ 3 = 0 ; $2x_F - y_F + 3 = -4+1+3 = 0$ donc $F \in (P)$ alors l'équation donnée est celle de (P).	0,5
3a	$\overrightarrow{FH}(t+1; 2t+2; -2t)$; $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{V}_{(d)} = 0$; $(t+1)+2(2t+2)+4t = 0; t = -\frac{5}{9}$ alors $H\left(-\frac{14}{9}; -\frac{1}{9}; \frac{10}{9}\right)$.	1
3b	H milieu de $[EL]$ donc $L\left(-\frac{19}{9}; -\frac{11}{9}; \frac{20}{9}\right)$.	0,5
3c	(FH) est la bissectrice de $\widehat{EFL}$. $\overrightarrow{FM} = m\overrightarrow{FH} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}m - 2,\ y = \frac{8}{9}m - 1,\ z = \frac{10}{9}m.$	0,5
4	Un vecteur directeur de la médiatrice est $\overrightarrow{n_P}(2;-1;0)$ et la médiatrice passe par le point H ; d'où un système des équations paramétriques de la médiatrice est : $x = 2\lambda - \frac{14}{9}; y = -\lambda - \frac{1}{9}; z = \frac{10}{9}$ où λ est un paramètre réel.	1

QIII	Réponses	N
1	$P\left(E/B\right)=\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21}$; $P\left(E/B\right)=\frac{C_5^2}{C_6^2}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$; $P(E)=P(B\cap E)+P(\bar{B}\cap E)=\frac{5}{7}\times\frac{10}{21}+\frac{2}{7}\times\frac{10}{15}=\frac{26}{49}$	2.5
2	$P(F)=P(F\cap B)+P(F\cap\bar{B})=\frac{5}{7}\times\frac{1}{21}+0=\frac{5}{147}$; $P(G)=1-\left(P(E)+P(F)\right)=\frac{64}{147}$	1.5
3	$P\left(\bar{B}/\bar{G}\right)=\frac{P\left(\bar{B}\cap\bar{G}\right)}{P\left(\bar{G}\right)}=\frac{P(\bar{B}).P\left(\bar{G}/B\right)}{1-P(G)}=\frac{\frac{2}{7}.\frac{C_5^2}{C_6^2}}{1-\frac{64}{147}}=\frac{28}{83}$	1
4	$P(S>0)=1-P(S<0)=1-\frac{5}{147}=\frac{142}{147}$	1

QIV	Réponses	N
1	$x^2+(y-3)^2=4.$	0,5
2a	$L(\alpha;\beta)$, $N(\alpha;-3)\Rightarrow M\left(\alpha;\frac{\beta-3}{2}\right)$.	0,5
2b	$\frac{\alpha^2}{4}+\left(\frac{\beta-3}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+(\beta-3)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$ puisque L est sur (C). Donc M se déplace sur (E).	1
2c		0,5
3a	$\frac{p}{2}=SF=\frac{1}{4}$ donc 2p = 1.y'y est l'axe focal , donc $x^2=-(y-1)\Leftrightarrow y=1-x^2$. **OU**: La directrice est la droite (D) d'équation $y=\frac{5}{4}$. Dist(R,(D)) = RF avec R(x; y) $\in$ (P) alors $\left\|y-\frac{5}{4}\right\|^2=x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2\Leftrightarrow y=1-x^2$.	0,5
3b	Voir la figure en 2c.	0,5
4a	$\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}$.	0,5
4b	Aire = $\frac{\pi ab}{2}-2\int_0^1(1-x^2)dx=\pi-\frac{4}{3}$.	1
5	y = f(x) = 1 – x^2 donc f '(– 1) = 2, $f'(x_H)=-\frac{1}{2}\Rightarrow -2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ donc $H\left(\frac{1}{4};\frac{15}{16}\right)$. $\overrightarrow{GH}=\frac{5}{4}\overrightarrow{GF}$ donc G, H et F sont alignés.	1

QV	Réponses	N
1a		0,5
1b	$\widehat{COD} = \widehat{DOD'} = 90^0$ donc C, O, D´ sont alignés et OC = OD = OD´,d'où O est le milieu de[CD´]. OB = OC = OD´ donc le triangle CBD´ est rectangle en B. D'après Pythagore on a : $CB = \sqrt{CD'^2 - BD'^2} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$.	1
2a	R(C) = D et R(A) = B $\Rightarrow$ (AC) est perpendiculaire à (BD) et AC = BD.	0,5
2b	R(D) = D´, R(A) =B donc AD perpendiculaire à BD´ et (BC) est perpendiculaire à (BD´), d'où (AD) et (BC) sont parallèles.	1
3a	h(A) = C et (AD) est parallèle à (BC), donc h(D) = B.	0,5
3b	$\overrightarrow{BC} = K\overrightarrow{DA}$ donc $K = -\sqrt{3}$.	0,5
4	F milieu de [BC] ; E, F et L sont alignés. (OF) et (OL) sont perpendiculaires à (BC) $\Rightarrow$ O, F et L sont alignés.	1
5a	S est la similitude S $(E, \sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$.	0,5
5b	S (A) $= h\circ R'(A) = h(R'(A)) = h(D) = B$ car EAD est un triangle rectangle isocèle.	0,5

QVI	Réponses		N
A	1a	$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty(+\infty) = +\infty$.	0,5
	1b	$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x - x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}[h(x) - y] = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, (d) est une asymptote (C).	0,5
	2a	$h'(x) = e^x - 1$. $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline h'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline h(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	1

	2b	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$ donc (C) admet une direction asymptotique verticale 	1
	2c	Le minimum de h(x) est 0, donc h(x) $\geq$ 0, d'où $e^x - x - 1 \geq 0$, donc $e^x \geq x + 1$.	0,5
B	1	$h(x) \geq 0 ; e^x - x \geq 1$ donc $e^x - x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$	1
	2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{0}{+\infty} = 0$.	1
	3	$f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{\left(e^x - x\right)^2}$. $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & \frac{e}{e-1} & \nearrow & 1 \end{array}$	1,5
	4a	y = x + 1.	1
	4b	$f(x) - (x+1) = \frac{e^x}{e^x - x} - (x+1) = \frac{e^x - (x+1)(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{x(x - e^x + 1)}{e^x - x}$	1
	4c	Pour $x < 0$; $f(x) - (x+1) > 0$, (C') est au-dessus de (T). Pour $x > 0$; $f(x) - (x+1) < 0$, (C') est en dessous de (T). Pour x = 0 , (C') coupe (T).	1
	4d		1
C	1	$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(x)dx - \int_0^{n} f(x)dx = \int_0^{n+1} f(x)dx + \int_n^{0} f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx$. Or $f(x) > 0$ donc $\int_n^{n+1} f(x)dx > 0$ par suite (u_n) est croissante.	1
	2a	$f(x) - 1 = \frac{e^x}{e^x - x} - 1 = \frac{e^x - e^x + x}{e^x - x} = \frac{x}{e^x - x} \geq 0$ donc $f(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 0$.	1
	2b	$\int_0^n f(x)dx \geq \int_0^n dx$ car $n \geq 0$ d'où $u_n \geq n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq +\infty$ donc (u_n) est divergente.	1