

عدد المسائل أربع	مسابقة في الرياضيات المدة ساعتان	الإسم: الرقم:
------------------	-------------------------------------	------------------

**ملاحظة:** يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو تخزين المعلومات أو رسم البيانات.  
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

### I- (4 Points)

Le tableau suivant donne, en millions de LL, les dépenses en soins médicaux d'une grande entreprise industrielle entre les années 2000 et 2007:

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
Dépenses en millions LL	115,1	115,2	121,7	129,5	137,9	144,9	156,5	163,8

- a - Ecrire une équation de la droite de régression ( $D_{y/x}$ ) de y en x  
b- On suppose que l'évolution des dépenses en soins médicaux continue selon le même modèle pour les années qui suivent. Estimer les dépenses en 2015.
- L'entreprise souhaite, qu'en 2008, les dépenses en soins médicaux augmentent seulement de 2% et continuent à augmenter de la même manière d'une année à l'autre. On modélise cette évolution par une suite  $(u_n)$  où  $u_n$  est le montant des dépenses, en millions LL, pour l'année  $(2007 + n)$ .  
Ainsi  $u_0 = 163,8$ .  
a-Vérifier que  $u_1 = 167,076$  et calculer  $u_2$ .  
b-Justifier que  $(u_n)$  est une suite géométrique et préciser sa raison.  
c- L'entreprise réalise-t-elle des économies en 2015 selon le nouveau modèle ? Justifier la réponse.

### II- (4 Points)

Les 60 élèves d'une classe de langue suivent des cours d'arabe, d'anglais ou de français.  
(Chaque élève suit les cours d'une seule langue).

- 25% de ces élèves suivent des cours d'arabe parmi lesquels il y a 6 filles ;
- 30% de ces élèves suivent des cours d'anglais parmi lesquels il y a 10 garçons ;
- la classe compte au total 25 filles.

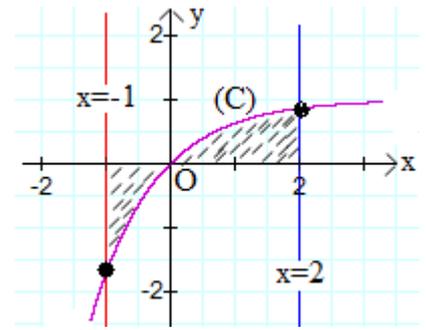
- 1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	Etudiant l'arabe	Etudiant l'anglais	Etudiant le français	Total
Filles			11	
Garçons				
Total				60

- 2) On choisit, au hasard, un élève de cette classe et on considère les événements suivants :
  - A : « l'élève choisi étudie l'anglais » ;
  - G : « l'élève choisi est un garçon ».a - Calculer les probabilités suivantes :  $P(A)$ ,  $P(G)$  et  $P(A \cap G)$ , .  
b - Vérifier que  $P(A \cup G) = \frac{43}{60}$  et calculer  $P(\bar{A} \cap \bar{G})$ .
- 3) Dans ce qui suit on choisit, au hasard, un groupe de deux élèves;  
a - Calculer la probabilité de l'événement M « Les deux élèves choisis étudient la même langue ».  
b- Les deux élèves choisis sont deux garçons. Calculer la probabilité qu'ils étudient le français.

### III-(4 points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes. Justifier la réponse.



- 1) Si la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - e^{-x}$  est représentée par la courbe (C) alors l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 2$ , est égale à  $(e + \frac{1}{e^2} + 1)$  unités d'aire.

- 2) L'ensemble des solutions de l'inéquation  $\ln(2x - 1) - \ln 2(5 - 2x) < 0$  est  $]-\infty; \frac{11}{6}[$ .

- 3) Rami a placé dans une banque un capital de 20 000 000 LL à un taux d'intérêt annuel de 8% avec capitalisation annuelle. Sami a placé, en même temps, dans une autre banque un capital de 22 000 000 LL à un taux d'intérêt annuel de 7% avec capitalisation annuelle. La valeur acquise par le capital de Rami dépassera, pour la première fois, la valeur acquise par celui de Sami, après 11 ans.

### IV- (8 Points)

A- Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = [0 ; +\infty [$  par  $g(x) = 1 + \frac{x-3}{8} e^x$ .

- 1) Démontrer que  $g'(x) = \frac{1}{8}(x-2)e^x$ .
- 2) Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  et vérifier que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  dans  $I$ .

B- Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty [$  par  $f(x) = x + 1 + \frac{x-4}{8} e^x$ . On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

- 1) Calculer  $f(0)$ ,  $f(4)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) Vérifier que  $f'(x) = g(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 3) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.
- 4) Tracer (T) et (C).
- 5) La droite (d) d'équation  $y = \frac{9}{8}x$  coupe (C) en deux points d'abscisses respectives  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Tracer (d) dans le même repère que (C) et vérifier que  $0,7 < \alpha < 0,9$ .

C-

Dans ce qui suit on prend  $\alpha = 0,813$  et  $\beta = 3,919$ .

Une entreprise fabrique des objets. Le coût total de fabrication, exprimé en millions de LL, est modélisé par  $f(x) = x + 1 + \frac{x-4}{8} e^x$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués, exprimé en milliers avec  $0 \leq x \leq 4$ .

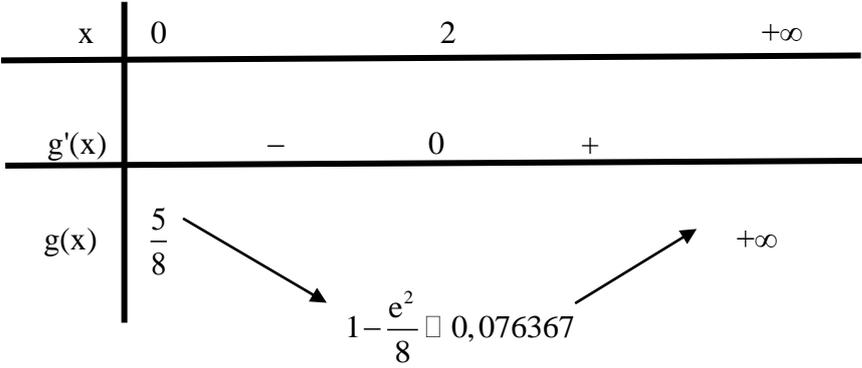
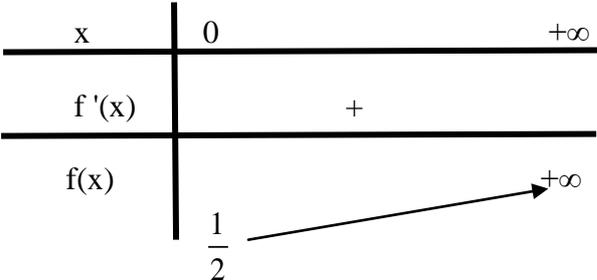
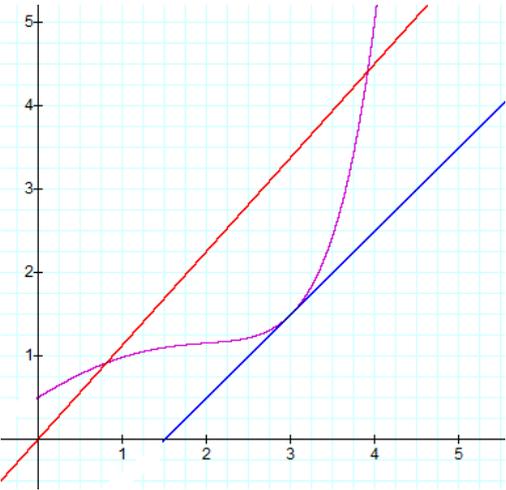
- 1) Calculer les coûts fixes.
- 2) Calculer le coût marginal de fabrication de 2000 objets. Donner une interprétation économique de ce résultat
- 3) Chaque objet fabriqué est vendu à 1125 LL et on suppose que la fabrication est vendue en sa totalité.
- a- Vérifier que la fonction du revenu  $R$  est donnée par  $R(x) = \frac{9}{8}x$ .
- b- Pour quels niveaux de production l'entreprise réalise-t-elle des bénéfices? Justifier la réponse.

## ES- SESSION 2- MATH - 2013

Q <sub>1</sub>	Réponses	Note
1.a	La droite (D <sub>y/x</sub> ) a pour équation $y = 7,445x + 109,516$ .	1
1.b	Une estimation de la dépense est : $y = 7,445 \times 15 + 109,516 = 221\,191\,000$ LL.	1
2.a	$u_1 = u_0(1 + 0,02) = 167,076$ . $u_2 = u_1(1 + 0,02) = 170,417$ .	2
2.b	$u_n = u_{n-1}(1 + 0,02) = 1,02 u_{n-1}$ . Donc ( $u_n$ ) est une suite géométrique de raison $q = 1,02$ .	1,5
2.c	$2015 = 2007 + 8$ , donc $n = 8$ . $u_8 = u_0 \cdot q^8 = 163,8 (1,02)^8 = 191,917\,806$ soit 191 917 80LL. L'entreprise économise 29 274 000 LL.	1,5

Q <sub>2</sub>	Réponses	Note																				
1	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Etudiant l'arabe</th> <th>Etudiant l'anglais</th> <th>Etudiant le français</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Filles</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>11</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>Garçons</td> <td>9</td> <td>10</td> <td>16</td> <td>35</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>15</td> <td>18</td> <td>27</td> <td>60</td> </tr> </tbody> </table>		Etudiant l'arabe	Etudiant l'anglais	Etudiant le français	Total	Filles	6	8	11	25	Garçons	9	10	16	35	Total	15	18	27	60	1
		Etudiant l'arabe	Etudiant l'anglais	Etudiant le français	Total																	
	Filles	6	8	11	25																	
	Garçons	9	10	16	35																	
Total	15	18	27	60																		
2.a	$P(A) = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ . $P(G) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$ . $P(A \cap G) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ .	1,5																				
2.b	$P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G) = \frac{43}{60}$ . $P(\bar{A} \cap \bar{G}) = \frac{6+11}{60} = \frac{17}{60}$ . <b>OU:</b> $\bar{A} \cap \bar{G} = \overline{A \cup G}$ $P(\bar{A} \cap \bar{G}) = 1 - \frac{43}{60} = \frac{17}{60}$ .	1																				
3.a	$P(M) = \frac{C_{15}^2 + C_{18}^2 + C_{27}^2}{C_{60}^2} = \frac{203}{590}$ .	1,5																				
3.b	$P(FF/GG) = \frac{C_{16}^2}{C_{35}^2} = \frac{24}{119}$ .	2																				

Q <sub>3</sub>	Réponses	Note
1	$A = -\int_{-1}^0 (1 - e^{-x}) dx + \int_0^2 (1 - e^{-x}) dx = -[x + e^{-x}]_{-1}^0 + [x + e^{-x}]_0^2 = \left(e + \frac{1}{e^2} - 1\right)$ unités d'aire. <b>F</b>	2,5
2	Condition initiale : $2x - 1 > 0$ et $10 - 4x > 0$ , d'où $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$ . soit $\ln(2x - 1) < \ln 2(5 - 2x)$ soit $2x - 1 < 10 - 4x$ soit $x < \frac{11}{6}$ . Donc $\frac{1}{2} < x < \frac{11}{6}$ . <b>F</b>	2
3	$C_n = C_0(1+i)^n \Rightarrow 20\,000\,000(1+0,08)^n > 22\,000\,000(1+0,07)^n \Rightarrow \left(\frac{1,08}{1,07}\right)^n > 1,1$ , donc $n \ln\left(\frac{1,08}{1,07}\right) > \ln 1,1 \Rightarrow n > 10,245 \Rightarrow n = 11$ . <b>V</b>	2,5

Q4	Réponses	Note
A1	$g'(x) = \frac{1}{8} [e^x + (x-3)e^x] = \frac{x-2}{8} e^x.$	1
A2	 <p>Le minimum de <math>g(x)</math> est positif donc <math>g(x) &gt; 0</math> pour tout <math>x \in [0, +\infty[</math>.</p>	2
B1	$f(0) = \frac{1}{2}, f(4) = 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$	1
B2	 <p><math>f'(x) = 1 + \frac{e^x + (x-4)e^x}{8} = 1 + \frac{(x-3)e^x}{8} = g(x).</math></p>	1,5
B3	$y = f'(3)(x-3) + f(3) = x + 1 - \frac{e^3}{8}.$	1
B4		2
B5	$f(0,7) - y(0,7) = 0,86 - 0,78 > 0; f(0,9) - y(0,9) = 0,94 - 1,01 < 0$ donc $0,7 < \alpha < 0,9.$	1
C1	$C(0) = 1 - 0,5 = 0,5.$ Donc les coûts fixes sont $0,5 \times 1\,000\,000 = 500\,000$ LL.	1
C2	Soit $C_m(x)$ le coût marginal. $C_m(x) = f'(x) = g(x).$ Le minimum de coût de production d'une unité supplémentaire (1000 objets) est 76367 LL et ceci pour la production du troisième millier d'objets.	1,5
C3a	$R(x) = \frac{1125}{1\,000\,000} \cdot x \cdot 1000 = 1,125x = \frac{9}{8}x.$	1
C3b	Pour $x \in ]0,813 ; 3,919[$ , la droite représentant la fonction revenue est au-dessus de la courbe (C) qui représente la fonction coût, donc pour une production comprise entre 814 et 3918 objets l'entreprise est bénéficiaire.	1