الاثنين 1 تموز 2013 عدد المسائل: اربع	مسابقة في مادة الرياضيات المدة: ساعتان	الاسم: الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة)

I-(4points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les points :
A (4 ; 2 ; 0), B (2 ; 3 ; 1) et C (2 ; 2 ; 2).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2)Montrer qu'une équation du plan (P) déterminé par les trois points A, B et C est x + y + z – 6 = 0.
3) Soit (Q) le plan passant par A et perpendiculaire à (AB).
   a- Déterminer une équation de (Q).
   b- On désigne par (D) la droite d'intersection de (P) et (Q). Démontrer que (D) est parallèle à (BC).
4) Soit $H(5;3;1)$ un point de (Q).
   a- Démontrer que A est le projeté orthogonal de H sur (P).
   b- Calculer le volume du tétraèdre HABC.

II-(4points)

Une discothèque vend uniquement des albums musicaux classiques et modernes.
Une enquête menée auprès des clients de cette discothèque a donné les résultats suivants :

- 20% de ces clients ont acheté chacun un album classique.
- Parmi les clients qui ont acheté un album classique, 70% ont acheté un album moderne.
- 22% de ces clients ont acheté chacun un album moderne.

On interroge, au hasard, un client de cette discothèque et on considère les événements suivants :
C : « le client interrogé a acheté un album classique »
M : « le client interrogé a acheté un album moderne ».

1) Calculer la probabilité $P(C\cap M)$ et vérifier que $P(C\cap\overline{M}) = 0{,}06$.
2) Démontrer que $P(\overline{C}\cap\overline{M}) = 0{,}72$.
3) Calculer la probabilité que le client ait acheté au moins un album.
4) Sachant que le client n'a pas acheté un album moderne, calculer la probabilité qu'il ait acheté un album classique.
5) L'album classique est vendu à 30 000LL et l'album moderne est vendu à 20 000LL.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée par le client.
   a- Justifier que les valeurs possibles de X sont 0 , 20 000 , 30 000 et 50 000 et déterminer la loi de probabilité de X.
   b- Durant le mois de juin, 300 clients ont visité cette discothèque. Estimer le revenu de cette discothèque durant ce mois.

III- (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 3-2i$ et $z_C = 1$.

1) Démontrer les points A, B et C sont alignés.

2) Soit le nombre complexe $w = z_C - z_A$.

Ecrire w sous forme exponentielle et déduire que w^{20} est un réel négatif.

3) Soit M un point du plan d'affixe z.

a- Donner une interprétation géométrique de $|z-i|$ et de $|z-1|$.

b- On suppose que $|z-i| = |z-1|$. Démontrer que le point M se déplace sur une droite que l'on déterminera.

c- Démontrer que si $(z-i)\times(\bar{z}+i)=16$, alors le point M se déplace sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

IV-(8points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^{2x}+1}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (**unité graphique 2 cm**).

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire les asymptotes de (C).

2) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3) La courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse 0. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point W.

4) a- Calculer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b- Tracer (T) et (C).

5) a- Vérifier que $f(x) = -1 + \dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$ et déduire une primitive F de f.

b- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$.

6) La fonction f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g. On désigne par (G) la courbe représentative de g.

a-Préciser le domaine de définition de g.

b-Montrer que (G) admet un point d'inflexion J dont on déterminera les coordonnées.

c-Tracer (G) dans le même repère que (C).

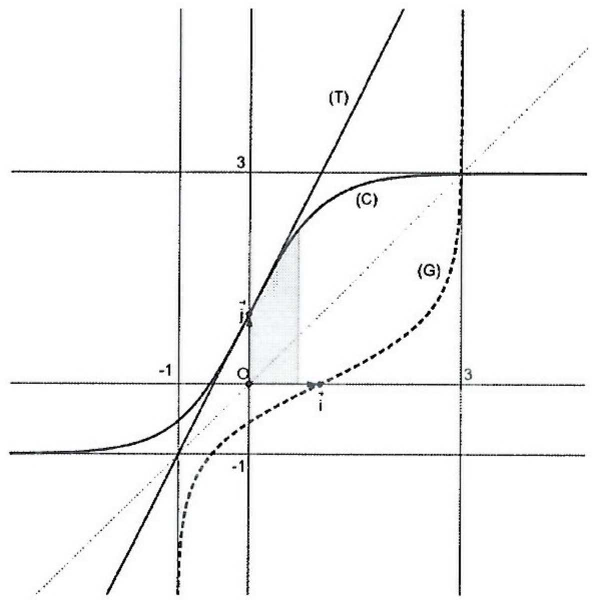
d-Déterminer g(x) en fonction de x.

Barème Math S.V Session 1 2013

Q_1	Solutions	Notes
1	$\overrightarrow{AB}(-2\,;\,1\,;\,1)$, $\overrightarrow{BC}(0\,;\,-1\,;\,1)$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, donc le triangle ABC est rectangle en B.	0,5
2	$x_A + y_A + z_A - 6 = 0$, donc A est un point de (P) ; de même, $x_B + y_B + z_B - 6 = 0$, donc B est un point de (P) et $x_C + y_C + z_C - 6 = 0$, donc C est un point de (P). D'où (P) : x + y + z – 6 = 0. **Ou** bien on cherche le produit mixte $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ avec M(x : y ; z) un point quelconque de (P).	0,5
3. a	Pour tout point M(x, y, z) dans (Q) on a: $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0$; (Q): – 2 x + y + z + 6 = 0.	0,5
3. b	Un vecteur directeur de (D) est $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q}$, donc $\overrightarrow{V}(0\,;\,-3\,;\,3)$, et $\overrightarrow{BC}(0\,;\,-1\,;\,1)$ et B $\notin$ (Q), donc B $\notin$ (D), donc (D) est parallèle à (BC). **Ou** bien : puisque (BC) est perpendiculaire à (AB) et (AB) est perpendiculaire à (D) en A, alors (BC) et (D) sont deux droites de (P) perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles.	1
4. a	A $\in$ (P), $\overrightarrow{AH}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n_P}(1;1;1)$ donc (AH) et perpendiculaire à (P).	1
4. b	Le volume du tétraèdre HABC est égal à : $V = \frac{1}{3}$ HA × l'aire du triangle ABC = $\frac{1}{6} \times BA \times BC \times \sqrt{3} = 1$ unités de volume. **Ou** bien $V = \frac{\left\|\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right\|}{6} = \frac{6}{6} = 1.$	0,5

Q_2	Solution	Notes
1	$P(C\cap M) = P(C)\times P(M/C) = 0,14.$ $\quad P(C\cap \overline{M}) = P(C)\times P(\overline{M}/C) = 0,06.$	1
2	$P(C\cap\overline{M}) + P(\overline{C}\cap\overline{M}) = P(\overline{M}) = 1 - P(M)$ donc $P(\overline{C}\cap\overline{M}) = 0,78 - 0,06 = 0,72.$	0,5
3	P (au moins un album) = 1 – $P(\overline{C}\cap\overline{M})$ = 0,28.	0,5
4	$P(C/\overline{M}) = \frac{P(C\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0,06}{0,78} = \frac{1}{13}.$	0,5
5a	Les quatre valeurs possibles sont : 0 (le client n'a rien acheté), 20 000 (le client a acheté l'album moderne), 30 000 (le client a acheté l'album classique), 50 000 (le client a acheté les deux albums). $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_i & 0 & 20\,000 & 30\,000 & 50\,000 \\ \hline P_i & 0,72 & 0,08 & 0,06 & 0,14 \\ \hline\end{array}$	1
5b	E(X) = $\sum P_i X_i$ = 0 × 0, 72 + 20 000 × 0, 08 + 30 000 × 0, 06 + 50 000 × 0, 14 = 10 400 L L. R= E(X) × 300 = 10 400 × 300 = 3 120 000 LL.	0,5

Q_3	Solutions	Notes
1	$z_A - z_B = -3 + 3i$ et $z_A - z_C = -1 + i$. $z_A - z_B = 3(z_A - z_C)$ d'où $z_{\overrightarrow{BA}} \quad {}_{\overrightarrow{CA}}$; par suite $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{CA}$ et les trois points A, B et C sont alignés.	0,5
2	$w = z_{\overrightarrow{AC}} = 1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $w^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} e^{-5i\pi} = -\left(\sqrt{2}\right)^{20}$.	1
3. a	$\|z - i\| = \|z_M - z_A\| = AM$; $\|z - 1\| = \|z_M - z_C\| = CM$.	0,5
3. b	$\|z - i\| = \|z - 1\|$, d'où MA = MC ; donc le point M varie sur la médiatrice (d) du segment [AC].	1
3-c	Si z_M vérifie $(z - i)\times(\overline{z} + i) = 16$ alors $(z_M - z_A) \times (\overline{z_M - z_A}) = 16$, soit $\|z_M - z_A\| \times \|\overline{z_M - z_A}\| = 16$, $\|z_M - z_A\| \times \|z_M - z_A\| = 16.$ D'où AM² = 16 ; donc le point M appartient à un cercle de centre A et de rayon 4.	1

Q_4	Solutions	Notes
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3-4=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. Donc (C) admet deux asymptotes horizontales d'équation $y = 3$ et $y = -1$.	1
2	$f'(x) = \dfrac{8e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$; f est strictement croissante sur IR. $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & & & 3 \\ & -1 & \nearrow & \end{array}$	1
3	Pente de (T) = f '(0) = 2, et (T) passe par le point W (0 ; 1), d'où l'équation de (T) est : $y = 2x + 1$.	0,5
4. a	$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 = \dfrac{4}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln 3}{2}$.	0,5
4. b		1
5-a	$f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^{2x}+1} = \dfrac{3e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et $1 + \dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1} = \dfrac{3e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. $F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-1+\dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx = -x + 2\int\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = -x + 2\ln\left(e^{2x}+1\right) + c$.	1
5-b	A = 4A' cm^2. $A' = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \left[-x+2\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_0^{\ln 2} = 2\ln 5 - 3\ln 2 = \ln\left(\dfrac{25}{8}\right)$. Donc $A = 4\ln\left(\dfrac{25}{8}\right) cm^2$.	0,5
6. a	Dom (g) =]–1; 3[.	0,5
6. b	W (0,1) est un point d'inflexion de (C), d'où le symétrique de J par rapport à la droite d'équation y = x qui est le point J (1 ; 0), est un point d'inflexion de (G).	0,5
6. c	(G) est symétrique de (C) par rapport à la droite d'équation y = x.	0,5
6. d	$y = g(x) \leftrightarrows x = f(y) \leftrightarrows x = 3 - \dfrac{4}{e^{2y}+1} \leftrightarrows \dfrac{4}{e^{2y}+1} = 3 - x \leftrightarrows e^{2y} + 1 = \dfrac{4}{3-x} \leftrightarrows$ $e^{2y} = \dfrac{4}{3-x} - 1 = \dfrac{1+x}{3-x}$. Donc $2y = \ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$; $y = g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$.	1