الخميس 27 حزيران 2013
عدد المسائل: ست

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: أربع ساعات

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(2 Points)

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1) Les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_C = 2e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$ sont les trois sommets d'un triangle équilatéral.

2) Pour tout entier naturel non nul n, $Z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n}{2}$ est un réel.

3) Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;0[$, on a : $e^{|\ln(x+1)|} = x + 1$.

4) Pour tout réel b, l'équation $\ln x = -x + b$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique.

II-(2 Points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points A (1 ; 1 ; 1) et B (5 ; 2 ; 0).

(P) et (P') sont deux plans d'équations respectives (P) : $x + 2y - 2z + 3 = 0$ et (P′) : $2x + y + 2z = 0$.

On désigne par (d) la droite d'intersection de (P) et (P').

1) Vérifier qu'un système d'équations paramétriques de (d) est : $\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = t \end{cases}$ où t est un paramètre réel.

2) a- Montrer que les deux plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

b- Calculer les distances respectives de B à (P) et à (P') et calculer la distance de B à (d).

3) a-Déterminer une équation du plan (Q) formé par (d) et B.

b- Démontrer que (d) et (AB) sont non coplanaires.

4) a- Calculer les coordonnées du point d'intersection E de (P) avec la droite (AB).

b- Montrer que les points A et B sont situés du même côté par rapport au plan (P).

III-(3 Points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

x et y sont des réels tels que $y \neq 0$.

A tout point M d'affixe $z = x + i\,y$ on associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = z^3 + z$.

1) a-Vérifier que $(z - \overline{z})\,(z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2 + 1) = (z' - \overline{z'})$ où $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ sont les conjugués respectifs de z et z′.

b- Justifier que si z' est un réel, alors $(z - \overline{z})\,(z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2 + 1) = 0$.

c- Déduire que si z' est un réel, alors le point M varie sur l'hyperbole (H) d'équation $3x^2 - y^2 + 1 = 0$.

2) a- Déterminer les sommets et les asymptotes de (H).

b- Déterminer un foyer de (H) et sa directrice associée.

c- Tracer (H).

3) Soit I le point de (H) d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.

a- Ecrire une équation de la tangente (T) à (H) en I.

b- La droite (T) coupe les asymptotes de (H) en E et G. Démontrer que I est le milieu de [EG].

IV- (3 Points)

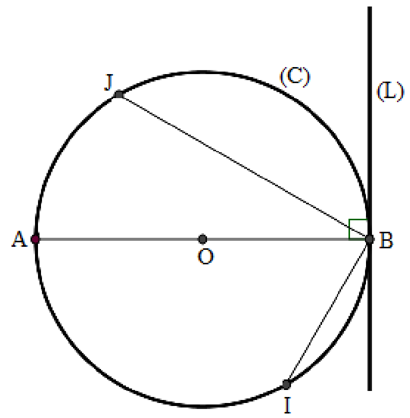
Dans un plan orienté, on considère un cercle (C) de centre O, de diamètre [AB] et de rayon 2 cm.

I et J sont deux points de ce cercle tels que :

$\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi\,]$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right) = -\dfrac{\pi}{6}\,[2\pi\,]$.

La droite (L) est tangente en B au cercle (C).

Soit S la similitude de centre B qui transforme I en J.



1) Déterminer un angle de S et vérifier que son rapport k est égal à $\sqrt{3}$.

2) a-Montrer que l'image de la droite (AI) par S est (AJ).

b-Trouver l'image de (AB) par S.

c- Déduire S(A) puis trouver S(J).

3) Déterminer l'image (C′) de (C) par S et calculer l'aire de (C′).

4) Soit $S_2 = S \circ S$, $S_3 = S \circ S \circ S$, ……. , $S_n = \underbrace{S \circ S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n\text{ fois}}$ où n est un entier naturel ; $(n \geq 2)$.

a-Vérifier que S o S est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

b- Déterminer, en fonction de n, le rapport et un angle de la similitude S_n.

c- Trouver les valeurs de n pour que S_n soit une homothétie.

V- (3 Points)

Une urne contient cinq boules rouges et cinq boules vertes.

On tire, au hasard et simultanément, trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- E : « Les trois boules tirées sont rouges »
- F : « Parmi les trois boules tirées il y a exactement deux boules rouges»
- G : « Parmi les trois boules tirées il y a au plus une boule rouge».

1) Calculer les probabilités P(E), P(F) et P(G).

2) Dans cette question un jeu se déroule de la façon suivante :

Un joueur tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

- Si l'événement G est réalisé, alors il **ne gagne rien** et le jeu s'arrête.
- Si l'un des événements E ou F est réalisé, alors il tire une nouvelle boule parmi les sept boules restantes dans l'urne.

  -Si cette boule tirée est verte, alors il gagne dix points ;

  -sinon il gagne deux points.

On considère l'évènement D : « le joueur gagne dix points ».

a- Calculer les probabilités P (D/E) et P (D/F).

b- Montrer que P(D) est égale à $\frac{25}{84}$.

c- Le joueur gagne 10 points. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges.

d- On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre des points gagnés par le joueur.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

VI – (7 Points)

A-

On donne l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 4y = 4x - 4$ où y est une fonction de x.

On pose $y = z + x$.

1) Trouver une équation différentielle (E′) satisfaite par z.

2) Résoudre (E′) puis déduire la solution générale de (E).

3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, admet au point G d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x - 1$.

B-

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4xe^{2x} + 1$.

1) Déterminer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

2) Déduire le signe de g(x).

C-

Dans ce qui suit, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (2x - 1)\,e^{2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a-Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

b-Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d) et préciser les coordonnées de leur point d'intersection A.

c-Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a-Vérifier que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point K d'abscisse α puis vérifier que $0{,}40 < \alpha < 0{,}41$.

c- Tracer (C).

3) Soit h la fonction réciproque de f dans $\mathbb{R}$. On désigne par (H) la courbe représentative de h.

a- Montrer que le point A appartient à (H) et écrire une équation de la tangente en A à (H).

b-Tracer (H) dans le même repère que (C).

c- Calculer $\int (2x-1)e^{2x}dx$ et déduire l'aire S du domaine limité par (H), l'axe des abscisses et la droite (d).

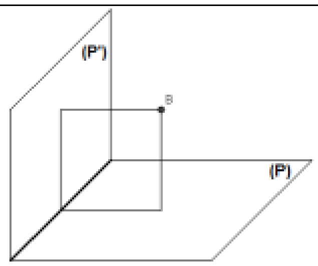
4) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

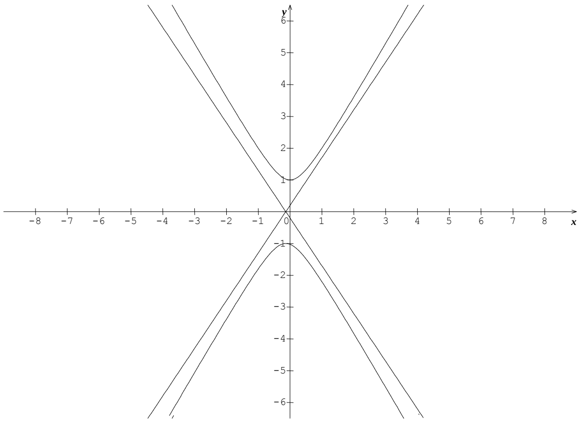
a- Démontrer, par récurrence sur n, que $f^{(n)}(x) = 2^n\,[2x + n - 1]\,e^{2x}$. ($f^{(n)}$ étant la dérivée nième de f).

b- Etudier le sens de variation de la suite (U_n) de terme général $U_n = f^{(n)}(0)$.

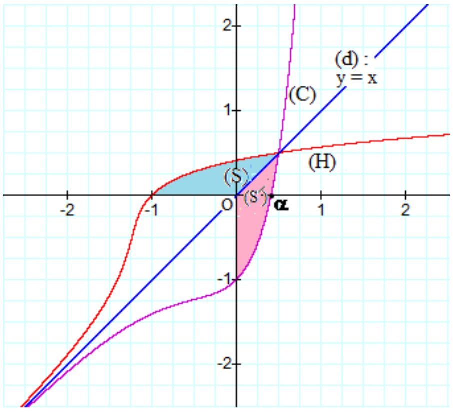
c- Démontrer que la suite (U_n) n'est pas convergente.

SG MATH- BAREME-2013

Q_1	Réponses	N
1	Les 3 complexes ont même module 2, donc les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O et de rayon 2. On aussi $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} = \frac{2\pi}{3}$ donc les points A, B et C forment un triangle équilatéral. **Vrai**	1
2	$(1 - i\sqrt{3})^n$ est le conjugué de $(1 + i\sqrt{3})^n$, donc Z est un imaginaire pur. **Faux**	1
3	Pour $-1 < x < 0$; $0 < x+1 < 1$, $\ln(x+1) < 0$ donc $f(x) = e^{-\ln(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ **.Faux**	1
4	Considérons la fonction f définie sur$]0 ; +\infty[$par f(x) = lnx + x – b. $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ f '(x) > 0 donc f est strictement croissante avec $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} + 1 - \frac{b}{x}\right) = +\infty$. Donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans IR. **Vrai**	1
Q_2	Réponses	Notes
1	M est un point variable de (d), d'où $x_M = -2t+1$, $y_M = 2t-2$ et $z_M = t$. $x_M + 2y_M - 2z_M + 3$ = –2t + 1 + 4t – 4 –2t + 3 = 0 ; donc (d) est incluse dans (P). $2x_M + y_M + 2z_M$ = – 4t + 2 + 2t – 2 + 2t = 0 ; donc (d) est incluse dans (P'). Ce qui donne que (d) est la droite d'intersection de (P) et (P′).	0,5
2.a	$\overrightarrow{n_P}$ (1 ; 2 ; –2), $\overrightarrow{n_{P'}}$ (2 ; 1 ; 2). $\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_{P'}}$ =2 +2 – 4 = 0 ; donc (P) et (P′) sont perpendiculaires.	0,5
2. b	d_1 = d (B →(P)) = $\frac{\lvert 5+4+3\rvert}{3}$ = 4. d_2 = d (B →(P')) = $\frac{\lvert 10+2\rvert}{3}$ = 4. (P) et (P′) sont perpendiculaires. $[d(B\to(d))]^2 = d_1^2 + d_2^2 = 32$; d (B→(d)) = $4\sqrt{2}$. **Ou :** par calcul direct 	1
3. a	Pour z = 0 ; G (1 ; –2 ; 0) ∈(d), $\overrightarrow{v_d}$ (–2 ; 2 ; 1) et $\overrightarrow{GB}(4;4;0)$. Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de (Q), d'où $\overrightarrow{GM}\cdot(\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{v_d}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Une équation de (Q) est : x – y + 4z – 3 = 0.	0,5
3. b	-Si (AB) et (d) sont coplanaires, alors A est un point de (Q), mais 1– 1+ 4 – 3 $\neq 0$ donc A n'est pas un point de(Q), d'où (AB) et (d) sont non coplanaires. **-Ou** A(1;1;1), B(5;2;0), G(1;–2;0)∈(d) , F(–1;0;1) ∈(d) $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{GF}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 4 ≠ 0 ; (AB) et (d) sont non coplanaires.	0,5
4. b	E∈(AB) ; E (4k +1 ; k + 1 ; – k + 1) ; E∈(P) donc $x_E + 2y_E - 2z_E + 3 = 0$; d'où k = $-\frac{1}{2}$ et E $(-1 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2})$.	0,5
4. c	$\overrightarrow{EA}$ $(2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{EB}$ $(6; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$; $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB} = 12 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{27}{2} > 0$. Ou $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EA}$ Donc les deux points A et B sont de même côté par rapport à (P).	0,5

Q_3	Réponses	Notes
1a	$(z'-\bar{z}') = z^3+z-\bar{z}^3-\bar{z} = z^3-\bar{z}^3+z-\bar{z} = (z-\bar{z})(z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2+1)$. **Ou bien** : $(z-\bar{z})(z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2+1) = z^3+z-(\bar{z}^3+z) = z'-\bar{z}'$.	0,5
1b	z' est réel ; $z' = \bar{z}'$ d'où $(z'-\bar{z}') = 0$ soit $(z-\bar{z})(z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2+1) = 0$.	0,5
1c	z' est réel, alors on a $z-\bar{z} = 0$: soit $z = \bar{z}$, donc y = 0 à rejeter, on bien $z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2+1 = 0$ soit $3x^2 - y^2 + 1 = 0$ avec $y \neq 0$. Donc M varie sur la courbe (H) d'équation $3x^2 - y^2 + 1 = 0$.	1
2a	$3x^2 - y^2 + 1 = 0$ donc (H) : $y^2 - \frac{x^2}{\frac{1}{3}} = 1$. Les sommets de (H) sont A (0 ; 1) et A′ (0 ; –1). Les asymptotes sont les droites d'équations : (L) $y = x\sqrt{3}$ et $(L') : y = -x\sqrt{3}$.	1
2b	Un foyer (H) est F (0 ; c) tel que $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{3}$ $F\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ La directrice associée à F a pour équation : $Y = \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5
2c		0,5
3. a	L'équation de (T) est de la forme $y - y_I = y'_I(x - x_I)$ avec $x_I = 1$, $y_I = 2$. D'autre part on a : $6x - 2yy' = 0$, d'où $6x_I - 2y_I y'_I = 0$, soit $-4y'_I + 6 = 0$ et $y'_I = \frac{3}{2}$. Donc l'équation de (T) est : $y - 2 = \frac{3}{2}(x-1)$, soit (T) : $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.	1
3. b	Désignons par E le point d'intersection de (T) et (L), donc $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{2\sqrt{3}-3}$ et par G le point d'intersection de (T) avec (L′), donc $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} = -\sqrt{3}x \Leftrightarrow x_G = \frac{-1}{2\sqrt{3}+3}$ $\frac{x_E+x_G}{2} = 1 = x_I$ et comme E, G et I sont alignés, I est le milieu de [EG].	1
Q4	Réponses	Notes
1	S = sim (B; k;α): $I \longrightarrow J$. • $\alpha = (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}) = (\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ (mod.2π). • Le triangle IBJ est demi équilatéral car : $\widehat{IBJ} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{JIB} = \frac{\pi}{3}$. d'où $k = \frac{BJ}{BI} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.	1
2. a	S ((AI)) est une droite qui passe par le point S(I) = J et est perpendiculaire à (AI),et puisque AJBI est un rectangle S ((AI)) = (AJ).	0,5

2. b	S ((AB)) est une droite qui passe par le point S(B) = B et est perpendiculaire à (AB), S ((AB)) = (L).	0,5
2. c	• $\left.\begin{array}{l} A\in(AI)\to S(A)=A'\in S(AI)=(AJ)\\ A\in(AB)\to S(A)=A'\in S(AB)=(L)\end{array}\right\}$ A' est le point d'intersection de (AJ) avec (L). • S(J) =J′ or AIBJ est un rectangle direct donc A'JBJ' est un rectangle direct.	1
3	• (C) est le cercle de diamètre [AB], S ((C)) = (C′) qui est le cercle de diamètre S [AB] = [A'B]. • $A_{(C')}=k^2A_{(C)}=3\pi\times 2^2=12\pi u^2$.	1
4a	• S ∘ S = (B; 3; $-\pi$) donc S ∘ S = hom (B ; –3).	0,5
4b	S_n = sim (B ; ($\sqrt{3}$)^n ; –n$\frac{\pi}{2}$).	0,5
4c	S_n est une homothétie si et seulement si –n$\frac{\pi}{2}$ = kπ ; donc, n = –2k ; k < 0 n est pair.	1
Q5	Réponses	Notes
1	$P(E)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$. $P(F)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$. $P(G)=1-\frac{1}{12}-\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$.	1,5
2. a	$P(D/E)=P(V/E)=\frac{5}{7}$. $P(D/F)=P(V/F)=\frac{4}{7}$.	1
2. b	$P(D)=P(D\cap E)+P(D\cap E)=P(D/E)\times P(f)+P(D/F)\times P(F)=\frac{5}{7}\times\frac{1}{12}+\frac{4}{7}\times\frac{5}{12}=\frac{25}{84}$.	1
2c	P(E/D)=$\frac{P(E\cap D)}{P(D)}=\frac{5}{84}\times\frac{84}{25}=\frac{1}{5}$.	1
4	X(Ω) = {0 ; 2 ; 10}. P (X= 0) = P (G) = $\frac{1}{2}$. P (X=10) = $\frac{25}{84}$. P (X=2) = 1-[P (X= 0) + P (X= 10)] = $\frac{17}{84}$. $E(X)=\sum x_i\times p_i=0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{17}{84}+10\times\frac{25}{84}=\frac{284}{84}$.	1,5
Q_6	Réponses	Notes
A.1	y' = z'+1, y"=z" donc z"– 4z'– 4+4z+4x= 4x – 4 et z"– 4z'+4z=0.	0,5
A.2	Equation caractéristique : $r^2-4r+4=0$ d'où r = 2. $z=(ax+b)e^{2x}$ et $y=(ax+b)e^{2x}+x$.	1
A.2	f(0)= –1 et f '(0)=1 donc b=–1 f '(x)=1+ae^{2x} +2(ax+b)e^{2x} donc f '(0)= 1+a+2b=1 ce qui donne a=2. d'où f(x)= x+(2x–1)e^{2x}	1
B.1	g ′(x) = 4 e^{2x} (1 + 2x). $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\frac{1}{2} & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & 1 & \searrow & 1-\frac{2}{e} & \nearrow & +\infty \end{array}$	1
B.2	g(x) admet un minimum positif donc g(x) > 0 pour tout réel x.	0,5
C.1a	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2xe^{2x}-e^{2x}\right)=0.$ Donc la droite (d) : y = x est une asymptote à (C) en $-\infty$.	0,5

C.1b.	$f(x) - y = (2x-1)e^{2x} = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ Donc : si $x = \frac{1}{2}$, (C) et (d) se coupent au point A $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$; si $x < \frac{1}{2}$ (C) est au-dessous de (d) ; et si $x > \frac{1}{2}$ (C) est au-dessus de (d).	1
C.1c	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x + (2x-1)\,e^{2x}) = +\infty.$	0,5
C.2a	$f'(x) = 1+2e^{2x}+2(2x-1)\,e^{2x} = g(x)$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$	1
C.2b	Sur IR, f est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α. De plus $f(0,4) \times f(0,5) = -0,045 \times 0,5 < 0$ ce qui donne $0,4 < \alpha < 0,5$.	1
C.2c	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [1 + \frac{2x-1}{x} e^{2x}] = +\infty.$ Donc (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique parallèle à l'axe des ordonnées.  	1
C.3.a	A appartient à (d), donc le symétrique de A par rapport à (d) est A. D'où A appartient à (H). $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2e+1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$	1
C.3b	(H) est le symétrique de (C) par rapport à (d).(voir figure)	0,5
C.3c	Soit $u = 2x-1$ et $v' = e^{2x}$ donc $u' = 2$ et $v = \frac{1}{2}e^{2x}$ ce qui donne : $\int (2x-1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - +C.$ A cause de la symétrie, l'aire S demandée est égale à l'aire S′ du domaine limité par (C), la droite (d) et l'axe des ordonnées. $S' = \int_0^{0,5} (x - f(x))\,dx = \int_0^{0,5} (1-2x)\,e^{2x}dx = \left[(1-x)e^{2x}\right]_0^{0,5} = \frac{e-2}{2}$. Donc $S = S' = \frac{e-2}{2}$ u².	1,5
C.4a	Soit $a_n = 2^n\,[2x + n - 1]\,e^{2x}$. Pour n = 2 ; $f''(x) = 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4(2x + 1)\,e^{2x}$. $a_2 = 4(2x + 1)\,e^{2x}$. Donc la formule est vraie. Supposons que $f^{(n)}(x) = a_n$ et démontrons que $f^{(n+1)}(x) = a_{n+1}$. En effet : $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}]'(x) = 2^n\,[2 + 2(2x + n - 1)]\,e^{2x} = 2^n\,[4x + 2n]\,e^{2x} = 2^{n+1}[2x + n]\,e^{2x} = a_{n+1}$. Donc la formule est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.	1
C.4b	$U_n = 2^n\,(n-1)$; $U_{n+1} - U_n = 2^{n+1}(n) - 2^n\,(n-1) = 2^n\,(2n - n + 1) = 2^n\,(n + 1) > 0$; (U_n) est strictement croissante.	0,5
C.4c	$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n(n-1) = +\infty$, par suite (U_n) n'est pas convergente.	0,5