إرشادات عامة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات أو رسم البيانات.

- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (2 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on considère les deux points I (2; 1; 2),F(1;1 ;1) et la droite (d) définie par: $x = 2m$; $y = m - 1$; $z = m + 2$, où m un paramètre réel.
(P) est le plan déterminé par la droite (d) et le point I.

1) Vérifier que $x - y - z + 1 = 0$ est une équation de (P).

2) Soit E le projeté orthogonal de I sur (d). Trouver les coordonnées de E.

3) On considère, dans le plan (P), le cercle (C) de centre I et tangent à (d).
   a- Prouverque F est un point de (C).
   b- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite (Δ)tangente en F à (C).

II-(3 points)

On dispose de deux urnes Uet Vtelles que :

- L'urne U contient quatre boules blanches et deux boules rouges.
- L'urne V contient deux boules blanches et trois boules rouges.

A- Un joueur tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V.
Il marque+3 points s'il tire une boule rouge de U et +1 point s'il tire une boule rouge deV;
Il marque -1point s'il tire une boule blanche deU et -2points s'il tire une boule blanche de V.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme algébrique des points marqués par le joueur.

1) Trouver les quatre valeurs possibles de X et démontrer que $P(X = 0) = \frac{2}{5}$.

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

B-Dans cette partie, le joueur tire une boule de l'urne U et la met dans l'urne V, puis il tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne V.
On considère les évènements suivants:
B: « La boule tirée de l'urne U est blanche»,
D: «Les deux boules tirées de l'urne V sont de couleurs différentes».

1) Vérifier que $P(D/B) = \frac{3}{5}$ puis calculer $P(D \cap B)$.

2) Calculer P(D).

3) Sachant que les deux boules tirées de Vsont de même couleur, quelle est la probabilité que la boule tirée de U soit blanche?

III- (2 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$.

1) a- Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.

b- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Déduire que (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \geq 1$, par $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

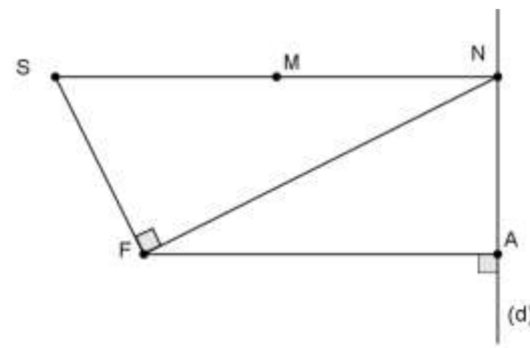
a- Prouver que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 2$ et déterminer son premier terme.

b- Exprimer v_n en fonction de n puis vérifier que $u_n = \frac{n}{2^n}$.

IV- (3 points)

Dans la figure ci-contre:

- A et F sont deux points fixes tels queAF= 4.
- (d) est la droite perpendiculaire à (AF) en A.
- N est un point variable de (d).
- (NS) est la droite parallèle à la droite (AF).
- NFS est un triangle rectangle en F.
- Mest le milieu de [NS].



A-

1) a- Démontrer que, lorsque N varie sur (d), M sedéplace sur une parabole (P) de foyer F et de directrice (d).

b- Déterminer le sommet V de (P).

2) (Δ) est la parallèle menée de F à (d). E est un point de (Δ) tel que FE = 4.

a- Montrer que E est un point de (P).

b- Prouver que (EA) est tangente à (P).

B-

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(V;\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{VA}$.

1) a- Vérifier que $y^2 = -8x$ est une équation de (P).

b- Tracer (P).

2) T est un point d'affixe z et L est un pointd'affixe z' tel que : $z' = 3z - \bar{z}$.

Soit z= x+iy et z' = x'+iy'. (x, y, x' et y' sont des réels.)

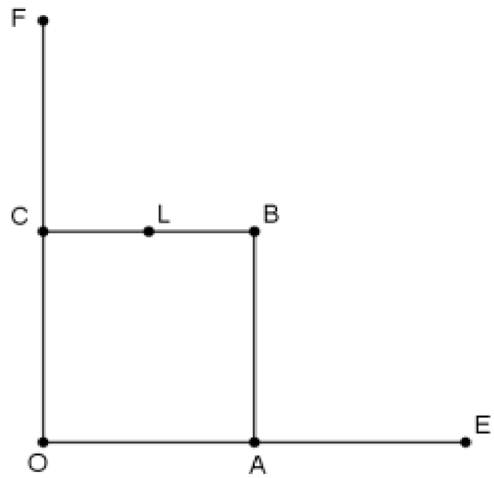
a- Exprimer x' et y' en fonction de x etde y.

b-Prouverquelorsque T varie sur le cercle de centre O et de rayon 1, L se déplace sur une ellipse (E) dont A et F sont deux de ses sommets.

V-(3 points)

Dans la figure ci-dessous, OABC est un carré directtel que:

OA = 2 et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.



Soit E le symétrique de O par rapport à A,F le symétrique de Opar rapport à C et L le milieu de [BC].

S est la similitudequi transforme O en E et C en O.

1) Calculerle rapport k et un angle α de S.

2) a- Trouver l'image de la droite (BC) par S.

b- Prouver que l'image de la droite (OB) par S est la droite (EF).

c- Déterminer S(B) puis S(L).

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$

a- Ecrire la forme complexe de S.

b- Déduire l'affixe du centre I de S.

c- Prouver que I est l'intersection des deux droites (OL) et (CE).

VI-(7 points)

A- On considère l'équation différentielle $(E): y'' - 4y' + 4y = 4x - 4$.
On pose $y = z + x$.

1) Former une équation différentielle (E') satisfaite par z et résoudre (E').
2) Trouver la solution particulière de (E) dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x - 1$.

B- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(d) est la droite d'équation $y = x$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   b) Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).
   c) Vérifier que (d) est une asymptote oblique à (C) quand x tend vers $-\infty$.

2) a) Montrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
   b) Dresser le tableau de variation de f' et déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse k.
   a) Vérifier que $0,4 < k < 0,5$.
   b) Tracer (C) en précisant son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

4) Trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

5) f admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque g. On désigne par (G) la courbe représentative de g.
   a) Ecrire une équation de la tangente (D) à (G) en son point d'abscisse -1.
   b) Montrer que (G) admet un point d'inflexion H dont on déterminera les coordonnées.
   c) Tracer (G) dans le même repère que (C).
   d) On donne $E = \displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)dx$. Exprimer E en fonction de k.

Q	Answers	M
1	• Let A(0; -1; 2) be a point on (d) and let M(x; y; z) be a variable point in (P), then: $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{V_d})=0$ gives x-y-z+1=0. OR	1
2	T (2m; m-1; m+2); $\overrightarrow{IT}.\overrightarrow{V_d}=0$ gives m = 1, so T (2; 0; 3) and R = IT = $\sqrt{2}$.	1
3a	The vector $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-1;2)$ is normal to plane (Q); So: x–y+2z+r=0, and since A belongs to (Q) then r = -5; (Q): x – y + 2z – 5 = 0.	0.5
3b	• $H\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};2\right)$ belongs to (Q); • $\overrightarrow{TH}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$ is parallel to the vector $\overrightarrow{N}_{(Q)}(1;-1;2)$, so (TH) is perpendicular to (Q).	0.5
3c	H is midpoint of $[TT']$, so $x_H=\frac{x_T+x_{T'}}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{2+x_{T'}}{2}\Rightarrow x_{T'}=1$; Similarly: $y_{T'}=1$ and $z_{T'}=1$; Thus: T'(1; 1; 1).	0.5
3d	The area of triangle ITT' is: $\frac{1}{2}\left\Vert\overrightarrow{IT}\times\overrightarrow{IT'}\right\Vert$; But $\overrightarrow{IT}\times\overrightarrow{IT'}$ = (1; -1; -1), so the area is $\frac{\sqrt{3}}{2}$ u^2.	0.5

Banc 2014 S.G. Probabilités/1Ang

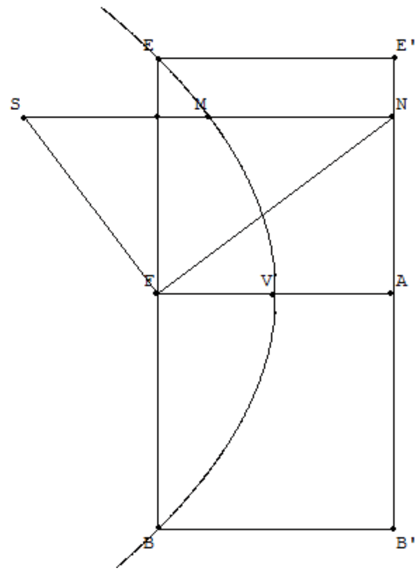
Q		Answers	M
A	1	The values of X are: 3+1= 4, 3–2=1, –1+1= 0 and –1–2 = –3. $P(X=0)=P(W_U;R_V)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.	1
	2	P(X= –3) = P(2W) = $\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$; $P(X=1)=P(R_U;W_V)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$; $P(X=4)=P(R;R)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$.	1

	3	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{2}{15}.$	0.5
B	1	$P(R) = P(R\cap U) + P(R\cap V) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}.$	0.5
	2	$P(E) = P(U/R) = \frac{P(U\cap R)}{P(R)} = \frac{1}{6}\div\frac{7}{15}=\frac{5}{14}.$ $P(F) = P(V/W) = \frac{P(V\cap W)}{P(W)} = \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)\div\left(1-\frac{7}{15}\right)=\frac{3}{8}.$	1

Barème : S.G. Suite/1

Q	**Answers**	M
1a	$u_1=\frac{1}{2}>0$; Suppose $u_n>0$, then $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n>0.$	0.5
1b	$u_{n+1}-u_n=\frac{1-n}{2n}u_n\le 0$; hence (u_n) is decreasing. (u_n) is decreasing and has a lower bound 0 then it is convergent.	1
2a	$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}u_n\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}\right)=v_n-\ln 2.$ (v_n) is an arithmetic sequence with first term $v_1=-\ln 2$ and $d=-\ln 2$.	1
2b	$v_n=v_1+(n-1)d=-n\ln 2.$ $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)=-n\ln 2 \Leftrightarrow \frac{u_n}{n}=e^{-n\ln 2}\Leftrightarrow u_n=\frac{n}{e^{n\ln 2}}=\frac{n}{(e\ln 2)^n}=\frac{n}{2^n}.$	1
2c	$\ln(u_n)=\ln\left(\frac{n}{2^n}\right)=\ln(n)-n\ln(2)=n\left[\frac{\ln(n)}{n}-\ln(2)\right].$ Then $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=+\infty[0-\ln(2)]=-\infty.$ Hence $\lim_{n\to+\infty}u_n=0.$	0.5

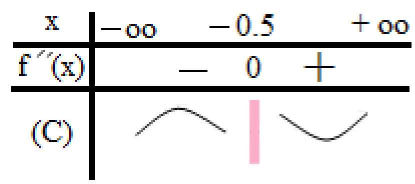
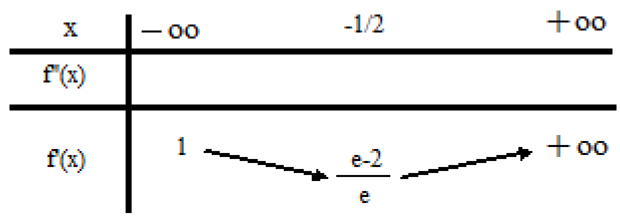
Q	**Answers**	**M**
1a	MF = ½ SN = MN = d (M $\to$ (d)) hence M moves on (C).	1

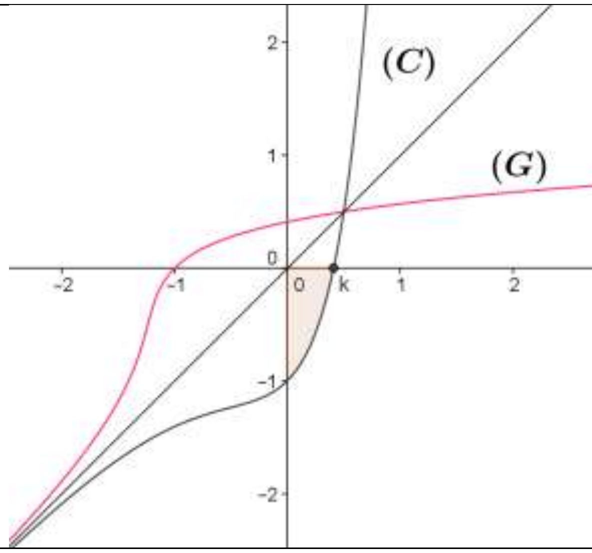
1b	V is the midpoint of [FA].	0.5
2a	E and B are equidistant from F and (d).	0.5
2b	(EA) and (BA) are bisectors of angles $F\hat{E}E'$ and $F\hat{B}B'$.	0.5
2c		0.5
3a	$y^2=-8x$	0.5
3b	M (x; y), N (2; y) S (2x-2; y); $y^2=-4(x_S+2)$, hence (C´) is on parabola with vertex (–2; 0), focus (–3; 0) and directrix (x = –1).	1
4a	(E) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$.	0.5
4b	If (I(a; b) is a point of intersection then the product of the slopes is $-\frac{4}{a}\times-\frac{-4a}{5b}=\frac{16a}{5b^2}=\frac{16a}{5(-8a)}=-\frac{2}{5}$.	1

Q	**Answers**	**M**
1a	$\frac{OE}{CA}=\frac{a\sqrt{2}}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\,2\pi)$.	0.5
1b	$\frac{BO}{BA}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{BE}{BA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BO}\right)=\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\,2\pi)$ and $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right)=\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\,2\pi)$. Therefore, B is the center of S. $S(A)=E$, $S(B)=B$, $S(C)=O$ hence the image of squareABCD under Sis square EBOA.	1
2a	f is the composite of a dilation and a rotation therefore it is a similitude with	0.5

	angle $\frac{\pi}{2}$ and ratio 2.	
2b	$f(B) = h \circ r(B) = h(O) = O.$ $f(O) = h \circ r(O) = h(A) = A'.$	0.5
3a	$\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{BA'} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BL}\right).\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA'}\right) = -OB^2 + BL \times OA = 0.$ Hence (OL) is perpendicular to (BA').	0.5
3b	f (OL) = (BA') and f(BA') = (OL) hence the center is the intersection of (BA') and (OL).	0.5
4a	$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z + b$ with S(C) = O hence $z' = \frac{1+i}{2} z' + 1 + i.$	0.5
4b	(AI) is perpendicular to (BC) with I equidistant from (BC) and A hence I is the vertex of (P). D is a point of (P) since DC = DA and (DB) bisector of $\widehat{ADC}$. Hence (DB) is tangent to (P).	0.5
4c	The focus of (P) is S (A) = E and its directrix is S (BC) = (BO). Hence Vertex L (1 ; 2) and p =2. An equation of (P) is: $(y-2)^2 = 4(x-1).$	1
4d	$A_1 = \int_1^2 \left(2 - 2 + 2\sqrt{x-1}\right)dx = \frac{4}{3}u^2$ hence $A_1 = \frac{1}{2}A_2 \Leftrightarrow A_2 = \frac{8}{3}u^2.$	0.5

VI.

Q6		Answers	M
A	1	$z'' - 4z' + 4z = 0$; $z = (ax+b)e^{2x}$	1
	2	$y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$; $a = -2$ et $b = 1$; $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$	1
B	1a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	0.5
	1b	$f(x) - x = (2x-1)e^{2x}$; si $x < \frac{1}{2}$ alors (C) au-dessous de (d); si $x > \frac{1}{2}$ alors (C) au-dessus de (d); si $x = \frac{1}{2}$ alors (d) coupe (C).	0.5
	1c	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} = 0$ donc $y = x$ est une asymptote oblique en $-\infty$	1.5
	2a	$f''(x) = 4(2x+1)e^{2x}$  donc $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{e+4}{2e}\right)$ est un point d'inflexion.	1
	2b	 $f'(x) \geq \frac{e-2}{2} > 0$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	2
	3a	Comme $f(0,4).f(0,5) < 0$ donc $0,4 < x < 0,5$.	1
	3b		1
	4	$F(x) = \frac{x^2}{2} + e^{2x}(x-1) + c$	1.5
	5a	$(D): y = x + 1$	1
	5b	En raison de symétrie par rapport à y=x, $H\left(-\frac{e+4}{2e}; -\frac{1}{2}\right)$ point d'inflexion de (G)	2

	5c		
	5d	$E=\int_{-1}^{0} g(x)dx=\int_{0}^{k} -f(x)dx=-F(k)+F(0)=-\frac{k^2}{2}-\left(k-1\right)e^{2k}+1$.	