الاحد 7 تموز 2013	مسابقة في مادة الرياضيات	الاسم:
عدد المسائل: أربع	المدة: ساعتان	الرقم:

ملاحظة: يُسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو إختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المُرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة).

I - (4points)

Une entreprise publie, sur internet, pendant 15 jours une annonce publicitaire pour un nouveau produit.
Le tableau suivant donne le nombre de personnes, en dizaines, qui ont consulté l'annonce, après sa publication.

Rang du jour $\mathbf{x_i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Nombre de personnes $\mathbf{y_i}$ (en dizaines)	**8**	**12**	**25**	**34**	**56**

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire et donner une interprétation à la valeur ainsi trouvée.

2) Ecrire une équation de la droite de régression $D_{y/x}$ de y en x.

3) On suppose que le modèle précédent se poursuit, estimer le nombre de personnes qui consultent l'annonce le dixième jour après sa publication.

4) En réalité 1250 personnes ont consulté l'annonce le dixième jour. Calculer le pourcentage de l'erreur commise avec l'estimation précédente.

5) On envisage un autre modèle d'ajustement pour cette série en prenant $y = 1{,}5x^2 - 2x + 7$.
Au dixième jour, lequel des deux ajustements précédents donne la meilleure estimation? Justifier.

II- (4points)

On dispose de deux boîtes identiques E et F.
La boîte E contient 9 boules rouges et 3 boules vertes et la boîte F contient 3 boules rouges et 5 boules vertes.
Un jeu consiste à choisir au hasard une des deux boîtes, puis à tirer toujours au hasard, une boule de la boîte choisie.

A- On considère les événements suivants :
E : « le joueur choisit la boîte E »,
F : « le joueur choisit la boîte F »,
R : « le joueur tire une boule rouge ».

1) Calculer les probabilités P(R/E) et $P(E \cap R)$.

2) Démontrer que $P(R) = \dfrac{9}{16}$.

3) Sachant que le joueur a choisi une boule rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte E ?

B- Le joueur remet la boule tirée dans la boîte choisie au premier tirage et recommence le même jeu.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées par le joueur après les deux tours joués.

1) Déterminer les trois valeurs possibles de X.

2) Démontrer que $P(X= 2) = \dfrac{81}{256}$.

3) Déterminer la loi de probabilité de X.

III - (4points)

En 2007, un club sportif comptait 400 abonnés.

On a constaté, d'une année à l'autre que le club perd 40% de ses abonnés et reçoit 100 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n le nombre des abonnés de ce club en l'année (2007 + n).

Ainsi $a_0 = 400$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}6\ a_n + 100$.

2) On considère, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 250$.

a-Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b-Donner l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n.

c-Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.

3) On suppose que ce modèle se poursuit.

a- En quelle année le nombre des abonnés de ce club sera-t-il pour la première fois inférieur à 260 ?

b- Le nombre des abonnés du club peut-il devenir inférieur à 250 ? Justifier.

IV - (8 points)

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par $f(x) = (2x + 6)e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

A- 1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

2) Vérifier que $f'(x) = -2(x+2)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) Tracer (C).

4) a-Démontrer que la fonction F définie sur [0 ; +∞ [par $F(x) = (-2x - 8)e^{-x}$ est une primitive de f.

b-Déduire l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

B- Une entreprise fabrique des batteries. La demande est donnée par f(x), exprimée en milliers de batteries et x est le prix unitaire, exprimé en milliers LL. $(0{,}1 \le x \le 4)$.

1) Quelle est la demande pour un prix unitaire de 1 000 LL ?

2) a- Calculer l'élasticité e(x) de la demande.

b- Calculer le prix unitaire pour que l'élasticité soit égale à –1.

3) Justifier que le revenu est donné par $R(x) = (2x^2 + 6x)e^{-x}$ et qu'il est exprimé en millions LL.

4) Le tableau suivant représente les variations de la fonction R.

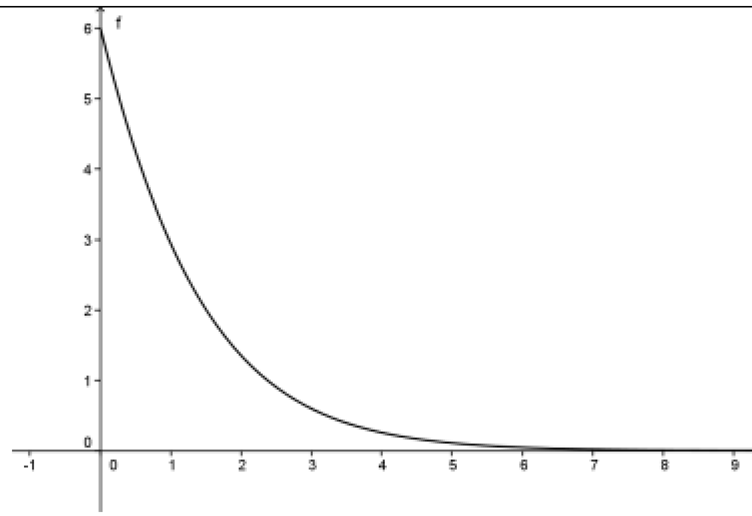
x	**0,1**	**1,303**	**4**
R(x)	↗		↘

a- Compléter le tableau et calculer le revenu maximal.

b- Combien de batteries doit-on demander à l'entreprise pour que le revenu soit maximal ?

MATH-BAREME-SESSION 1-SE-2013

Q_1	Réponses	Notes
1	r = 0,969 Il existe une très forte corrélation positive entre les deux variables.	1
2	y = 11,8x –8,4.	1
3	Pour x=10, y = 109,6 soit 1096 personnes.	1
4	$\frac{1250-1096}{1250}\times 100 = 12,32\%$.	2
5	Le second modèle donne y = 137 soit 1 370 personnes. 1 250 – 1 096 > 1 370 – 1250, le second modèle donne une meilleure estimation.	2
Q_2	Réponses	Notes
A.1	$P(R/E) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. $P(R\cap E) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.	1.5
A.2	$P(R) = P(R\cap E) + P(R\cap F) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{9}{16}$.	1
A.3	$P(E/R) = \frac{P(E\cap R)}{P(R)} = \frac{3}{8}\times\frac{16}{9} = \frac{2}{3}$.	1
B.1	Les valeurs possibles de X sont 0, 1 et 2.	0.5
B.2	P(X=2) = P(RR).$=\left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256}$.	1
B.3	P(X= 0) = P(VV), P(X=1) = P(VR) + P(RV), P(X=1) = P(VR) + P(RV) $= 2\times\frac{9}{16}\times\frac{7}{16} = \frac{63}{128}$. <table><tr><td>$x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p_i</td><td>$\left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{49}{256}$</td><td>$2\times\frac{9}{16}\times\frac{7}{16} = \frac{63}{128}$</td><td>$\left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256}$</td></tr></table>	2
Q_3	Réponses	Notes
1	$a_{n+1} = (1-0,4)\times a_n + 100 = 0,6a_n + 100$.	1
2a	$u_{n+1} = a_{n+1} - 250 = 0,6a_n + 100 - 250 = 0,6(a_n - 250) = 0,6a_n$. (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_0 = 150$.	1,5
2b	$u_n = u_0 \times q^n = 150(0,6)^n$ et $a_n = 150(0,6)^n + 250$.	1
2c	(u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $0 < q < 1$et de premier terme positif donc (u_n) est décroissante. $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} - u_n < 0$ car (u_n) est décroissante, donc (a_n) est décroissante.	1
3a	$150(0,6)^n + 250 < 260 \Leftrightarrow 150(0,6)^n < 10 \Leftrightarrow (0,6)^n < \frac{1}{15}, \text{donc } n > \frac{\ln(1/15)}{\ln 0,6} \Leftrightarrow n > 5,3$. Donc en 2013, le nombre des abonnés du club sera pour la première fois inférieur à 260.	1.5
3b	Le nombre des abonnés du club diminue mais ne peut pas devenir inférieur à 250 car $a_n - 250 = 150(0,6)^n > 0$. réponse est non.	1

Q_4	Réponses	N
A1	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x}+6e^{-x}\right)=0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C).	1
A2	$f'(x)=\left[2e^{-x}-(2x+6)e^{-x}\right]=-2(x+2)e^{-x}$. $\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & 0 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & \\ \hline f(x) & 6 & \searrow & 0 \\ \hline \end{array}$	2
A3		1.5
A.4a	$F'(x)=\left[-2e^{-x}-(-2x-8)e^{-x}\right]=(2x+6)e^{-x}=f(x)$.	1
A.4b	$A=\left[-2(x+4)e^{-x}\right]_0^1=-10e^{-1}+8=4,321u^2$.	1.5
B.1	Pour un prix de 1000LL, x = 1, f(1) = 2,943 soit une demande de 2934 batteries.	1
B.2a	$e(x)=\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{-2x(x+2)e^{-x}}{2(x+3)e^{-x}}=\dfrac{-x(x+2)}{x+3}$.	1
B.2b	$-x(x+2)=-x-3$; $x^2+x-3=0$; $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ =1,303 ou $x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ (à rejeter). Le prix unitaire est de 1303 LL.	1
B.3	Le revenu R(x) = $xf(x)=x(2x+6)e^{-x}=\left(2x^2+6x\right)e^{-x}$. Puisque la demande est en milliers et le prix en milliers, le revenu est en milliers de batteries $\times$ milliers LL donc en millions LL.	1.5
B.4a	$\begin{array}{\|c\|ccccc\|}\hline x & 0,1 & & 1,303 & & 4 \\ \hline R(x) & 0,56 & \nearrow & 3,047 & \searrow & 1,026 \\ \hline \end{array}$ Le revenu maximal est de 3 047 000LL.	1.5
B.4b	Pour x = 1,303 f(1,303)= 2,338 soit 2338 batteries.	1