

إرشادات عامة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 points)

The following table shows, for each year, the sales of a company (in millions LL).

year	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rank x_i of the year	1	2	3	4	5	6	7
Sales y_i (in millions LL)	12	19	29	37	45	53	62

1) a- Draw, in a rectangular system, the scatter plot of the points associated to the distribution $(x_i; y_i)$.

b- Calculate the coordinates of the center of gravity G and plot this point in the preceding system.

c- Determine an equation of the regression line $\left(D_{\frac{y}{x}}\right)$ of y in terms of x, and draw this line in the same system.

2) Calculate the correlation coefficient r of this distribution, and interpret the value thus obtained.

3) Assume that the above pattern remains valid for the next ten years.

a- Estimate the sales of the company in the year 2018.

b- Estimate the percentage of increase in the sales from the year 2014 till 2018.

II- (4 points)

In the year 2012, the amount of trash in a certain town was 40 000 tons.

A regional organization decides to reduce 5% of this trash yearly, while 300 tons of trash are added every year after the reduction.

Denote by u_n the amount of trash, in tons, in the year $(2012 + n)$. (where $n \in \mathbb{N}$).

That is $u_0 = 40\,000$.

1) a- Verify that $u_1 = 38\,300$ and calculate u_2 .

b- For every natural number n, show that $u_{n+1} = 0.95u_n + 300$.

2) Consider the sequence (v_n) defined by: $v_n = u_n - 6\,000$.

a- Show that (v_n) is a geometric sequence whose common ratio and first term are to be determined.

b- Express v_n in terms of n, then deduce u_n in terms of n.

3) The recycling of one ton of trash costs 120 000 LL.

Denote by h_n the amount of money needed to recycle trash in the year $(2012 + n)$.

a- Express h_n in terms of n, and then show that the sequence (h_n) is strictly decreasing.

b- In which year will h_n become less than 3×10^9 LL for the first time?

III- (4 points)

The following are the results of a survey on a group of students about the instruments they bought.

- 40% of these students bought a tablet.
- Out of those who bought a tablet, 20% bought a calculator.
- Out of those who did not buy a tablet, 95% bought a calculator.

A student may buy a tablet, a calculator, both or neither.

One student is selected randomly from this group.

Consider the following events:

C: «The student selected bought a calculator»;

T: «The student selected bought a tablet».

1) a- Calculate the probabilities $P(C \cap T)$ and $P(C)$.

b- Calculate $P(\bar{C} \cap \bar{T})$.

2) Knowing that the student selected did not buy a calculator, calculate the probability that he did not buy a tablet.

3) The price of a tablet is 150 000 LL and that of a calculator is 30 000 LL.

Let X be the random variable equal to the amount paid by a student for buying instruments.

a- Give the four possible values of X.

b- Determine the probability distribution of X.

c- Calculate the expected value $E(X)$ and estimate the amount of money paid by 500 students.

IV- (8 points)

Consider the function f defined on $]0; +\infty[$ as $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ and denote by (C) its representative curve in an

orthonormal system $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Let (d) be the line with equation $y = x + 1$.

Part A

1) Determine $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, and deduce an equation of an asymptote to (C).

2) a- Discuss, according to the values of x, the relative positions of (C) and (d).

b- Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ and prove that the line (d) is an asymptote to (C).

3) a- Copy and complete the following table of variations of the function f.

b- Plot (d) and (C).

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)			

4) The line (D) with equation $y = 3.2$ intersects (C) at two points with abscissas α and β with $\alpha < \beta$.

Verify that $0.4 < \alpha < 0.5$ and $2.5 < \beta < 2.6$.

Part B

A company produces articles. The average cost function, in millions LL, is modeled as: $\bar{C}(x) = f(x)$;

where x is the number, in thousands, of articles produced with $0.3 \leq x \leq 8$.

1) Give the number of articles to be produced in order to achieve a minimum average cost and determine the value of this minimum.

2) a- Determine in terms of x the total cost function $C_T(x)$ and the marginal cost function $M_C(x)$.

b- Calculate $M_C(1)$ and give an economical interpretation of this value.

3) 60% of these produced articles are sold for a price of 4000 LL each, and the remaining articles are sold for a price of 2000 LL each.

a- Verify that the profit function is given as $P(x) = x [3.2 - \bar{C}(x)]$.

b- Does the company realize a profit if the quantity produced and sold ranges between 500 and 2500 articles? Explain.

عدد المسائل : أربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة : ساعتان

الاسم:
الرقم:

إرشادات عامة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الإلتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I-(4 points)

Le montant des ventes d'une entreprise (en millions de LL) pour chacune des années suivantes est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Montant des ventes y_i (en millions de LL)	12	19	29	37	45	53	62

- 1) a- Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$.
b- Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point dans le repère précédent.
c- Déterminer une équation de la droite de régression $\left(D_{\frac{y}{x}} \right)$ de y en x et tracer cette droite dans le même repère.
- 2) Calculer le coefficient de corrélation r de cette série et interpréter la valeur ainsi obtenue.
- 3) On suppose que le modèle reste valide pour les prochaines dix années.
a- Estimer le montant des ventes de cette entreprise en 2018.
b- Calculer le pourcentage de l'augmentation du montant des ventes de 2014 à 2018.

II- (4 points)

En 2012, la quantité des déchets dans les décharges d'une ville était de 40 000 tonnes. Une organisation régionale décide de les réduire annuellement de 5%, mais 300 tonnes s'ajoutent chaque année à ces déchets après la réduction.

On désigne par u_n la quantité, en tonnes, des déchets en l'année $(2012 + n)$. $(n \in \mathbb{N})$

Ainsi $u_0 = 40\,000$.

- 1) a- Vérifier que $u_1 = 38\,300$ et calculer u_2 .
b- Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 300$.
- 2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6\,000$.
a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
b- Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.
- 3) Le recyclage d'une tonne de déchet coûte 120 000 LL. Soit h_n le montant nécessaire pour le recyclage des déchets en l'année $(2012 + n)$.
a- Exprimer h_n en fonction de n puis montrer que la suite (h_n) est strictement décroissante.
b- En quelle année, h_n sera pour la première fois strictement inférieur à 3×10^9 LL ?

III- (4 points)

Une enquête menée auprès d'un groupe d'élèves sur les appareils qu'ils ont achetés, a donné les résultats suivants :

- 40% de ces élèves ont acheté une tablette.
- Parmi ceux qui ont acheté une tablette, 20% ont acheté une calculatrice.
- Parmi ceux qui n'ont pas acheté de tablette, 95% ont acheté une calculatrice.

Un élève pourrait avoir acheté une tablette, une calculatrice, les deux à la fois, ou aucune d'elles.

On choisit au hasard un élève de ce groupe. On considère les événements suivants:

C : « L'élève choisi a acheté une calculatrice » et T: « L'élève choisi a acheté une tablette ».

1) a- Calculer les probabilités $P(C \cap T)$ et $P(C)$.

b- Calculer $P(\bar{C} \cap \bar{T})$.

2) L'élève choisi n'a pas acheté de calculatrice, calculer la probabilité qu'il n'ait pas acheté une tablette.

3) Le prix d'une tablette est de 150 000 LL et celui d'une calculatrice est de 30 000 LL.

Soit X la variable aléatoire égale au montant payé par un élève pour l'achat des appareils cités.

a- Donner les quatre valeurs possibles de X.

b- Déterminer la loi de probabilité de X.

c- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et estimer le montant payé par 500 élèves.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ et on désigne par (C) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (d) la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie A

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et déduire une équation d'une asymptote à (C).

2) a- Étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

b- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et prouver que (d) est une asymptote à (C).

3) a- Recopier et compléter le tableau de variations de f donné ci-dessous.

b- Tracer (d) et (C).

4) La droite (D) d'équation $y = 3,2$ coupe (C) en deux points d'abscisses α et β avec $\alpha < \beta$.

Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$ et que $2,5 < \beta < 2,6$.

x	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)			

Partie B

Une entreprise fabrique des articles. Le coût moyen, en millions de

LL, est modélisé par $C_M(x) = f(x)$ où x est le nombre en milliers des articles fabriqués, avec

$0,3 \leq x \leq 8$.

1) Donner le nombre d'articles qu'on doit fabriquer pour que le coût moyen soit minimal et déterminer la valeur de ce minimum.

2) a- Déterminer, en fonction de x, le coût total $C_T(x)$ et le coût marginal $C_m(x)$.

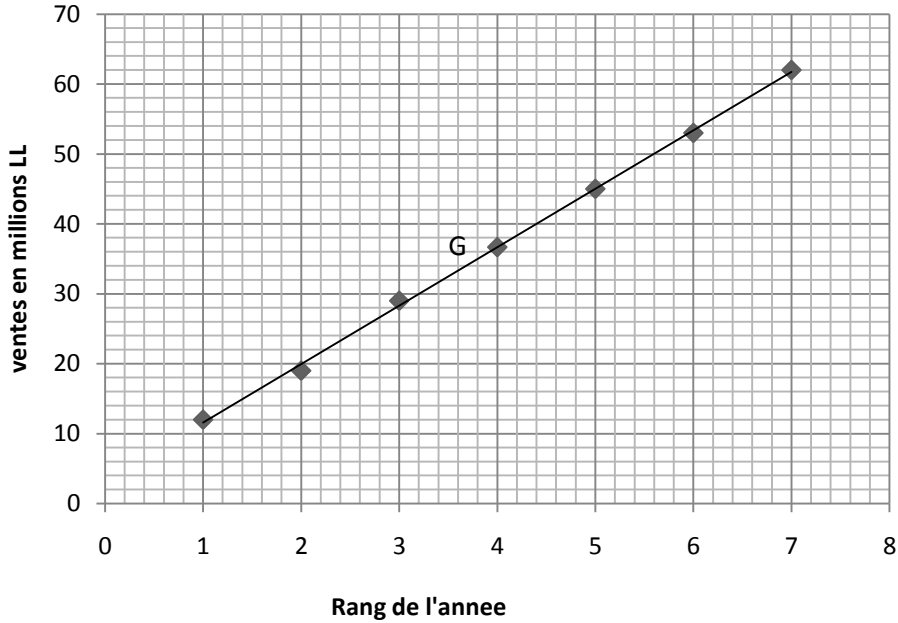
b- Calculer $C_m(1)$ et donner une interprétation économique à la valeur ainsi trouvée.

3) 60% des articles fabriqués sont vendus à 4000 LL, les articles restants sont vendus chacun à 2000 LL.

a- Vérifier que le profit est donné par $P(x) = x[3,2 - C_M(x)]$.

b- L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice si elle fabrique et vend un nombre d'articles compris entre 500 et 2500 ? Expliquer.

I-(7 points)

Q	Réponses	N
1a		
1b	G (4; 36.714) est le point moyen	
1c	$(D_{y/x}) : y=8,357x+ 3,285.$	
2	$r = 0,999$ Il y a une très forte corrélation positive.	
3a	En 2015, le rang est 11. Donc le montant des ventes est 95 212 000LL.	
3b	Pourcentage de l'augmentation = $\frac{95\ 212\ 000 - 62\ 000\ 000}{62\ 000\ 000} \times 100 = 53,568\%$.	

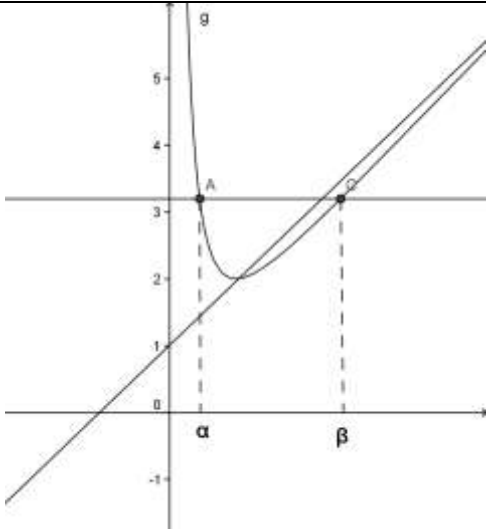
II-(7 points)

Q	Solutions	N
1-a	$u_1 = \left(40000 - 40000 \times \frac{5}{100} \right) + 300 = 38300 ; u_2 = \left(38300 - 38300 \times \frac{5}{100} \right) + 300 = 36685.$	
1-b	$u_{n+1} = (1 - 0,05) u_n + 300 = 0,95u_n + 300.$	
2a	$v_{n+1} = u_{n+1} - 6000 = 0,95u_n + 300 - 6000 = 0,95u_n - 5700$ $= 0,95(u_n - 6000) = 0,95v_n \Rightarrow (v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 6000 = 40000 - 6000 = 34000.$	
2b	$v_n = v_0 r^n = 34000(0,95)^n, v_n + 6000 = u_n \Rightarrow 34000(0,95)^n + 6000 = u_n.$	

3a	$h_n = u_n (0,80 \times 100000 + 0,20 \times 200000) = (34000 \times (0,95)^n + 6000) \times 120000.$ $h_{n+1} - h_n = 34000(-0,05)(0,95)^n = -1700(0,95)^n < 0;$ (h_n) est une suite strictement décroissante.	
3b	$(34000 \times (0,95)^n + 6000) \times 120000 < 3000000000 \Rightarrow (34000 \times (0,95)^n + 6000) < 25000 \Rightarrow$ $34000 \times (0,95)^n < 19000 \Rightarrow n > 11,34.$ En l'année 2024...	

III-(7 points)

Q	Réponses	N										
1	$P(C \cap T) = P\left(\frac{C}{T}\right) \cdot P(T) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$ et $P(C) = P(C \cap T) + P(C \cap \bar{T}) = 0,08 + (0,6 \cdot 0,95) = \frac{13}{20}$											
2	$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = P\left(\frac{\bar{C}}{\bar{T}}\right) \cdot P(\bar{T}) = 0,05 \cdot 0,6 = \frac{3}{100}$											
3	$P(\bar{T} / \bar{C}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,3}{0,35} = \frac{6}{7}$											
4a	$x_1 = 180000$ (T et C) $x_2 = 150000$ (seulement T) $x_3 = 30000$ (seulement C) $x_4 = 0$. (rien) $X(\Omega) = \{0; 30000; 150000; 180000\}$											
5b	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x_i</td> <td>0</td> <td>30 000</td> <td>150 000</td> <td>180 000</td> </tr> <tr> <td>p_i</td> <td>$\frac{3}{100}$</td> <td>$\frac{57}{100}$</td> <td>$\frac{8}{25}$</td> <td>$\frac{2}{25}$</td> </tr> </table>	x_i	0	30 000	150 000	180 000	p_i	$\frac{3}{100}$	$\frac{57}{100}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{25}$	
x_i	0	30 000	150 000	180 000								
p_i	$\frac{3}{100}$	$\frac{57}{100}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{2}{25}$								
5c	$E(X) = 180000 \times \frac{2}{25} + 150000 \times \frac{8}{25} + 30000 \times \frac{57}{100} + 0 \times \frac{3}{100} = 79500.$ Le montant moyen payé par un élève est 79500 LL. Donc $500 \times (79500) = 39750000$ LL.											

Q	Réponses	N												
A1	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; l'axe des ordonnées est une asymptote.													
A2a	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0$ est une asymptote.													
A2b	$f(x) - y = \left(-\frac{\ln x}{x} \right)$. Pour $0 < x < 1$, la courbe (C) est au-dessus de l'asymptote (d) Pour $x > 1$, la courbe (C) est au-dessous de (d); (C) coupe (d) au point A (1 ;2).													
3a	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f'(x)$</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> </table>	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	
x	0	1	$+\infty$											
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$											
3b														
A5	$f(0,4) = 3,69 > 3,2$ et $f(0,5) = 2,88 < 3,2$ $f(2,5) = 3,13 < 3,2$ et $f(2,6) = 3,23 > 3,2$. Donc $0,4 < \alpha < 0,5$ et $2,5 < \beta < 2,6$ $0,5 < \alpha < 0,6$ and $1 < \beta < 2$.													
B1	Puisque $C_M(x) = f(x)$, le coût moyen est minimal lorsque la production est 1000objets, le minimum est 2000000LL.													
B2a	$C_T(x) = x \times C_m(x) = x^2 + x - \ln(x)$, $C_m(x) = C'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$.	0,5												
B2b	$C_m(1) = 2$. Le coût de production du deuxième milliers d'objets est 2000000 LL.	0,5												
B3a	$R(x) = \left(\frac{60}{100} \times 4000 \times (1000x) + \frac{40}{100} \times 2000 \times (1000x) \times \frac{1}{1000000} \right) = 3,2x$. $P(x) = R(x) - C(x) = 3,2x - x \times C_M(x) = x(3,2 - C_M(x))$.	1												

B3b	$P(x) > 0 \Rightarrow x(3,2 - C_M(x)) > 0 \Rightarrow C_M(x) < 3,2 \Rightarrow f(x) < 3,2$ or: $0,5 < x < 2,5$ donc $\alpha < x < \beta$ alors $P(x) > 0$ donc il y a de bénéfice.	1
-----	---	---

إرشادات عامة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختران المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الوارد في المسابقة)

I- (4 علامات)

يمثل الجدول التالي المبيعات السنوية لإحدى الشركات (بملايين الليرات اللبنانية).

السنة	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
المبيعات y_i (بملايين ل.ل.)	12	19	29	37	45	53	62

- 1a - أرسم في المستوي الإحداثي تشتت النقاط العائد لتوزيع $(x_i ; y_i)$.
b- أحسب إحداثيات مركز الثقل G وضع هذه النقطة في المستوي السابق.
c- حدّد معادلة الانحدار الخطي $(D_{y/x})$ بكتابة y بدلالة x وارسم هذا المستقيم في نفس المستوي.
d- أحسب معامل الترابط r لهذا التوزيع وأعط تفسيراً للقيمة التي حصلت عليها.

2) نعتبر أن المنوال أعلاه سيستمر صالحاً لعشر سنوات قادمة.

- a- قدر مبيعات الشركة في العام 2018.
b- قدر عندئذ النسبة المئوية للزيادة في المبيعات من العام 2014 إلى العام 2018 .

II- (4 علامات)

في العام 2012 بلغت كمية النفايات في إحدى المدن 40000 طن. قررت إحدى الجمعيات الأهلية تقليص هذه الكمية بنسبة 5% سنوياً عبر تدوير النفايات، مع العلم أن كمية النفايات تزداد 300 طن سنوياً بعد التقليص.

ترمز u_n إلى كمية النفايات بالأطنان في العام $(2012+n)$ حيث n عدد طبيعي، وبالتالي فإن $u_0 = 40000$.

1) a- تحقق أن $u_1 = 38300$ ثم احسب u_2 .

b- بين أن $u_{n+1} = 0,95u_n + 300$ وذلك لكل عدد طبيعي n .

2) نعرّف المتتالية (v_n) معرفة كالتالي: $v_n = u_n - 6000$.

a- بين أن (v_n) هي متتالية هندسية واحسب نسبتها الثابتة وحدّها الأول.

b- جد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) تبلغ كلفة تدوير الطن الواحد من النفايات 120000 ل.ل.

h_n هو المبلغ الذي تحتاجه الجمعية لتدوير النفايات في العام $(2012+n)$.

a- جد h_n بدلالة n ثم بين أن المتتالية (h_n) متناقصة.

b- في أي عام سيصبح المبلغ المخصّص للتدوير أقل من 3000 مليون ل.ل. للمرة الأولى ؟

III - (4 علامات)

في ما يلي نتائج استطلاع رأي مجموعة من الطلاب حول الأدوات التي اشتروها.

- 40% من هؤلاء الطلاب اشترى كل منهم لوحة إلكترونية (tablet)
- من بين هؤلاء الذين اشترىوا لوحة إلكترونية، 20% اشترى كل منهم آلة حاسبة.
- من بين الذين لم يشترىوا لوحة إلكترونية، 95% اشترى كل منهم آلة حاسبة.

تم اختيار أحد الطلاب عشوائياً. نعرّف كما يلي الأحداث:

C: "اشترى الطالب المختار آلة حاسبة"

T: "اشترى الطالب المختار لوحة إلكترونية"

1) أ- أحسب الاحتمالين $P(C \cap T)$ و $P(C)$.

ب- أحسب الاحتمال $P(\bar{C} \cap \bar{T})$.

2) علمًا أن الطالب المختار اشترى آلة حاسبة، ما احتمال أن لا يكون قد اشترى لوحة إلكترونية؟

3) يبلغ سعر اللوحة الإلكترونية 150 000 ل.ل. فيما أن سعر الآلة الحاسبة 30 000 ل.ل.

X هي المتغيرة العشوائية المساوية للمبلغ الذي يدفعه الطالب لقاء شرائه لهذه الأدوات.

أ- أعط القيم الأربع للمتغيرة X.

ب- حدّد التوزيع الاحتمالي للمتغيرة X.

ج- احسب القيمة المتوقعة $E(X)$ وقدر المبلغ الذي يدفعه 500 طالب.

IV - (8 علامات)

الدالة f معرفة على الفترة $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ ، و (C) هو بيانها في المستوى الإحداثي $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، كما أن

(d) هو مستقيم معادلته $y = x + 1$.

القسم A

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		- 0 +	
f(x)			

1) حدّد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ واستنتج معادلة مقارب (محاذي) للبيان (C).

2) أ- ناقش، حسب قيم x، موقع البيان (C) بالنسبة للمستقيم (d).

ب- حدّد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبرهن أن المستقيم (d) هو مقارب للبيان (C).

3) انسخ واكمل جدول التغير المقابل للدالة f.

4) ارسم (d) و (C).

5) يتقاطع المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 3.2$ مع البيان (C) في النقطتين α (و β) (3.2)، حيث α أصغر من β .

تحقق أن $0.4 < \alpha < 0.5$ وأن $2.5 < \beta < 2.6$.

القسم B

تنتج إحدى الشركات x سلعة من صنف معين (x بالآلاف).

دالة الكلفة المتوسطة معرفة كما يلي $C_M(x) = f(x)$ (حيث $C_m(x)$ هي بملايين الليرات) و $0.3 \leq x \leq 8$.

1) اعط عدد السلع التي يجب انتاجها لتحقيق أدنى كلفة متوسطة، ثم حدّد هذه الكلفة الدنيا.

2) أ- جد دالة القيمة الاجمالية $C_T(x)$ وكذلك دالة الكلفة الهامشية $C_m(x)$.

ب- احسب $C_m(1)$ واعط تفسيراً اقتصادياً للنتيجة.

3) باعت الشركة 60% من السلع المنتجة بسعر 4000 ل.ل للوحدة، وخلال فترة التنازلات باعت السلع المتبقية بسعر 2000 ل.ل للوحدة.

أ- تحقق أن دالة الربح هي $P(x) = x(3.2 - C_M(x))$.

ب- هل تحقق الشركة ربحاً فيما لو باعت بين 500 و 2500 سلعة من انتاجها؟ اشرح.